

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ ЯДЕРНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ «МИФИ»

А.В. Шапкарин, И.Г. Кулло

ЛАБОРАТОРНЫЙ ПРАКТИКУМ
“ТЕОРИЯ АВТОМАТИЧЕСКОГО УПРАВЛЕНИЯ.
МЕТОДЫ ИССЛЕДОВАНИЯ НЕЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ”

*Рекомендовано УМО “Ядерные физика и технологии”
в качестве учебного пособия
для студентов высших учебных заведений*

Москва 2012

УДК 681.511.4(076.5)
ББК 32.965.5я7
Ш23

Шапкарин А.В., Кулло И.Г. Лабораторный практикум “Теория автоматического управления. Методы исследования нелинейных систем”. М.: НИЯУ МИФИ, 2012. – 92 с.

Данный лабораторный практикум обеспечивает проведение практических занятий по второй части курса ТАУ “Нелинейные системы управления” в среде инженерных расчетов *MATLAB* и системе цифрового моделирования *Simulink*.

С введением новой методики проведения занятий в компьютерном классе удается достичь более высоких результатов при исследовании систем, связанных как с получением на рабочем месте теоретических данных с помощью пакета программ Control System Toolbox, так и с возможностью выполнения большого количества различных экспериментов на их моделях.

В практикум включены шесть логически связанных между собой лабораторных работ, в которых наряду с практическими рекомендациями по моделированию содержится и краткое теоретическое обоснование различных выводов.

Первые три работы посвящены вопросам спектрального анализа динамических процессов в нелинейных системах и гармонической линеаризации нелинейных элементов с помощью полученной в первой работе модели узкополосного фильтра.

В четвертой и пятой работах выполняется построение теоретических областей устойчивости нелинейных систем с устойчивыми и неустойчивыми объектами при помощи метода гармонического баланса. В результате сравнения их с экспериментальными областями устойчивости, полученными на моделях систем, имеем возможность оценить погрешности приближенного метода гармонического баланса.

В шестой работе изучается метод фазовой плоскости, применяемый для исследования нелинейных систем второго порядка.

Лабораторный практикум предназначен для студентов, обучающихся по специальности “Электроника и автоматика физических установок” и другим инженерным специальностям.

Подготовлено в рамках Программы создания и развития НИЯУ МИФИ

Рецензент зав. лаб. НИИ “Атомного энергетического машиностроения”, доц. каф. “Информационные и управляющие системы” Волгодонского ИТИ НИЯУ МИФИ Кавришвили З.О.

ISBN 978-5-7262-1778-9

© Национальный исследовательский ядерный университет “МИФИ”, 2012

ОГЛАВЛЕНИЕ

Лабораторная работа № 1. РАСЧЕТ И МОДЕЛИРОВАНИЕ УЗКОПОЛОСНОГО ФИЛЬТРА.....	5
1.1. Структурная математическая модель узкополосного фильтра.....	5
1.2. Физический аналог узкополосного фильтра	9
1.3. Динамика узкополосного фильтра	11
1.4. Экспериментальная проверка правильности расчета и настройки УФ.....	13
1.5. Задание и порядок выполнения работы	15
Вопросы для подготовки к работе.....	16
Лабораторная работа № 2. ИССЛЕДОВАНИЕ СПЕКТРОВ ПЕРИОДИЧЕСКИХ СИГНАЛОВ.....	18
2.1. Теоретический анализ периодических сигналов.....	18
2.2. Экспериментальное определение спектров периодических сигналов	21
2.3. Восстановление периодического сигнала.....	24
2.4. Задание и порядок выполнения работы	25
Вопросы для подготовки к работе.....	26
Лабораторная работа № 3. ГАРМОНИЧЕСКАЯ ЛИНЕАРИЗАЦИЯ НЕЛИНЕЙНОСТЕЙ	27
3.1. Теоретические основы метода гармонической линеаризации.....	27
3.2. Примеры гармонической линеаризации нелинейностей.....	28
3.3. Гармоническая линеаризация на основе эксперимента	31
3.4. Задание и порядок выполнения работы	32
Вопросы для подготовки к работе.....	33
Лабораторная работа № 4. ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА ГАРМОНИЧЕСКОГО БАЛАНСА К АНАЛИЗУ УСТОЙЧИВОСТИ НЕЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ С СИММЕТРИЧНЫМИ НЕЛИНЕЙНОСТЯМИ И УСТОЙЧИВЫМИ ОБЪЕКТАМИ	34
4.1. Условия применимости метода гармонического баланса.....	34
4.2. Решение уравнения Гольдфарба на комплексной плоскости	35
4.3. Решение уравнения Гольдфарба с помощью ЛАФЧХ и шаблонов.....	37

4.4. Построение областей устойчивости нелинейной системы ..	40
4.5. Методика проведения экспериментов.....	47
4.6. Задание и порядок выполнения работы	48
Вопросы для подготовки к работе.....	49
Лабораторная работа № 5. ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА ГАРМОНИЧЕСКОГО БАЛАНСА К АНАЛИЗУ УСТОЙЧИВОСТИ НЕЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ С НЕУСТОЙЧИВЫМИ ОБЪЕКТАМИ.....	51
5.1. Критерий устойчивости автоколебаний в нелинейной системе с неустойчивой линейной частью	51
5.2. Построение областей устойчивости нелинейной системы с неустойчивыми объектами.....	53
5.3. Варианты заданий	58
5.4. Задание и порядок выполнения работы	59
Вопросы для подготовки к работе.....	60
Лабораторная работа № 6. ИССЛЕДОВАНИЕ РЕЛЕЙНЫХ СИСТЕМ НА ФАЗОВОЙ ПЛОСКОСТИ	61
6.1. Постановка задачи	61
6.2. Анализ объекта управления в первом варианте.....	63
6.3. Анализ объекта управления во втором варианте	66
6.4. Анализ объекта управления в третьем варианте.....	71
6.5. Границы семейств фазовых траекторий в релейных системах	76
6.6. Построение фазовых траекторий систем с кусочно- линейными статическими характеристиками	79
6.7. Схема проведения экспериментов.....	85
6.8. Задание и порядок выполнения работы	86
Вопросы для подготовки к работе.....	86
СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ	87
ПРИЛОЖЕНИЕ.....	88

Лабораторная работа № 1

РАСЧЕТ И МОДЕЛИРОВАНИЕ УЗКОПОЛОСНОГО ФИЛЬТРА

Цель работы – научиться проектировать узкополосный фильтр и строить его математические модели.

К одному из инструментов исследования нелинейных систем можно отнести узкополосный фильтр (УФ), с помощью которого определяются спектры сигналов, прошедших через нелинейные элементы и линейные динамические звенья.

УФ должен обеспечить решение задачи, заключающейся в выделении нужных гармонических составляющих из сложного периодического сигнала без искажения по амплитуде и фазе. Это означает, что амплитудная частотная характеристика УФ для выделяемой гармоники на заданной частоте ω_0 должна быть равна единице, а фазовая частотная характеристика равна нулю.

Чем круче спад амплитудной частотной характеристики по обе стороны от выделяемой частоты, тем уже полоса пропускания $\Delta\omega$ и тем более высоким качеством обладает УФ. Полосу пропускания УФ принято определять в соответствии с уровнем ослабления амплитудной частотной характеристики в $\sqrt{2}$ раз.

1.1. Структурная математическая модель узкополосного фильтра

В данной работе рассмотрим принципы построения линейного УФ, структурная схема которого представлена на рис. 1.1.

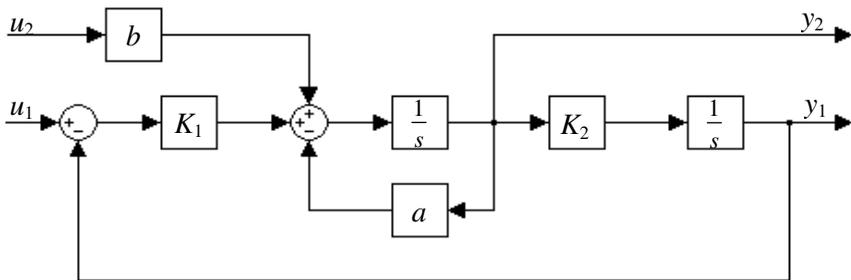


Рис. 1.1

Предлагаемая структурная математическая модель 2-го порядка, имеющая два входа и два выхода, может быть реализована как на аналоговых элементах (например на операционных усилителях), так и в цифровом виде на компьютере (например в среде *Simulink*). Отметим, что этой структурной схеме в работе будет поставлено в соответствие и реальное физическое устройство.

На приведенной схеме вход u_1 и выход y_1 являются вспомогательными, служащими для правильной настройки УФ, тогда как основными рабочими будут являться вход u_2 и выход y_2 .

Рассмотрим вначале связь между выходом y_1 и входом u_1 с помощью передаточной функции. Преобразуя структурную схему, находим ее выражение

$$W_{11}(s) = \frac{y_1(s)}{u_1(s)} = \frac{1}{T^2 s^2 + 2\xi Ts + 1},$$

где $T = \frac{1}{\sqrt{K_1 K_2}}$, $\xi = \frac{a}{2\sqrt{K_1 K_2}}$.

При значении коэффициента затухания $\xi < 1$ получаем колебательное звено с постоянной времени T , которое, очевидно, в качестве УФ использовано быть не может, так как пропускает низкие частоты, что подтверждается логарифмическими амплитудной и фазовой частотными характеристиками на рис. 1.2.

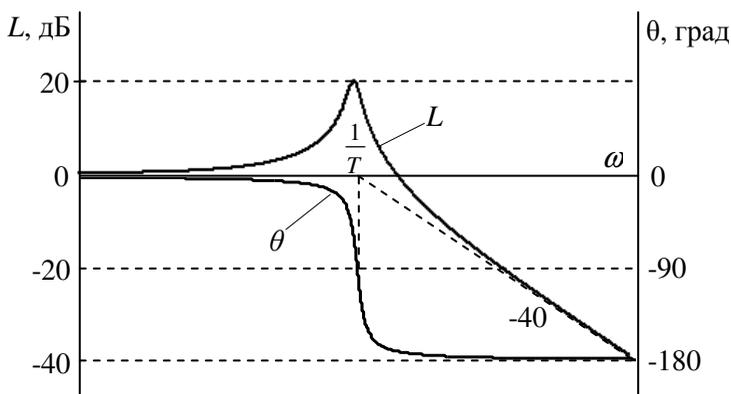


Рис. 1.2

Однако тот факт, что при малом значении коэффициента затухания ξ амплитудная частотная характеристика имеет значительный подъем на частоте $\omega = \frac{1}{T}$ (так при $\xi = 0,05$ подъем составит 20 дБ), дает предпосылки для использования колебательного звена в построении УФ.

Если же в качестве выходного сигнала принять y_2 , то выражение передаточной функции по отношению ко входу u_1 принимает вид

$$W_{21}(s) = \frac{y_2(s)}{u_1(s)} = \frac{\frac{1}{K_2} s}{T^2 s^2 + 2\xi T s + 1}.$$

В числителе передаточной функции появилось идеальное дифференцирующее звено, которое обеспечивает подавление низких частот, и если выбрать $\frac{1}{K_2} = T = \frac{1}{\sqrt{K_1 K_2}}$, то максимум амплитудной частотной характеристики окажется в точке $\frac{1}{T}$, а фаза при этом будет равна нулю, как показано на рис. 1.3.

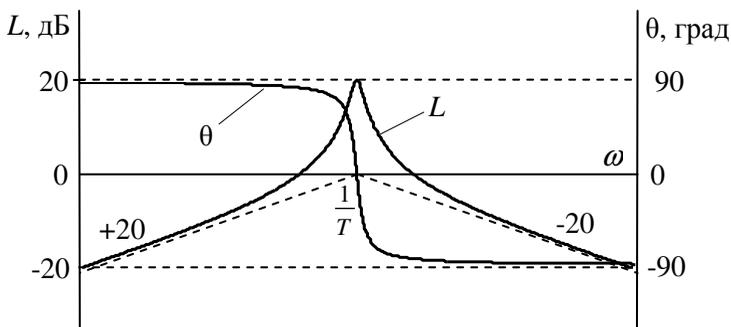


Рис. 1.3

Из условия равенства постоянных времени $\frac{1}{K_2} = T$ следует, что $K_1 = K_2$, а за выделяемую частоту гармоники УФ следует принять значение $\omega_0 = \frac{1}{T}$.

Логарифмические амплитудная и фазовая частотная характеристики на рис. 1.3 соответствуют значению коэффициента затухания $\xi = 0,05$, вызывающего подъем амплитудной характеристики при $\omega = \omega_0$ на уровень 20 дБ. Таким образом, если ослабить коэффициент усиления в 10 раз, то ЛАХ смещается вниз и максимум ее оказывается на уровне 0 дБ, что и означает выполнение поставленных требований к УФ в виде единичного усиления выделяемой гармоники на заданной частоте ω_0 без сдвига по фазе $\theta(\omega_0) = 0$.

Для достижения этой цели служит второй вход u_2 структурной схемы на рис. 1.1, где с помощью коэффициента $b = 0,1 \cdot K_1$ получаем необходимое ослабление в рассматриваемом примере. В таком случае передаточная функция, связывающая выход y_2 и вход u_2 принимает вид

$$W_{22}(s) = \frac{y_2(s)}{u_2(s)} = \frac{\frac{b}{K_1} \cdot \frac{1}{K_2} s}{T^2 s^2 + 2\xi Ts + 1}.$$

Не трудно доказать, что для правильно настроенного УФ не только $K_1 = K_2$, но и обязаны быть равны коэффициенты усиления a и b , что позволяет представить передаточную функцию в окончательном виде:

$$W_{22}(s) = \frac{2\xi Ts}{T^2 s^2 + 2\xi Ts + 1}.$$

В результате получаем ЛАФЧХ УФ, представленные на рис. 1.4, где показана полоса пропускания от частоты ω_1 до ω_2 , определяемая по уровню -3 дБ (ослабление в $\sqrt{2}$ раз).

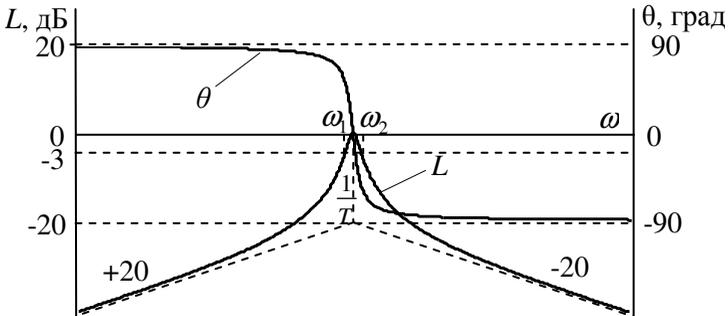


Рис. 1.4

1.2. Физический аналог узкополосного фильтра

Реальное физическое устройство в виде последовательного RLC -колебательного контура может быть использовано в качестве УФ. Четырехполосник, представленный на рис. 1.5, входным сигналом которого является напряжение, подаваемое на контур, а выходным – напряжение, снимаемое с конденсатора, дает передаточную функцию точно такого же вида, как и $W_{11}(s)$ с параметрами

$$T = \sqrt{LC} \quad \text{и} \quad \xi = \frac{R}{2} \sqrt{\frac{C}{L}}.$$

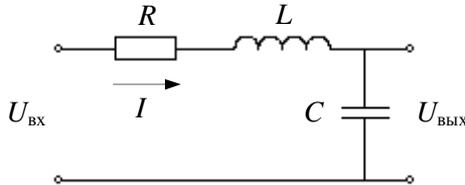


Рис. 1.5

Для колебательного контура существует понятие добротности, определяемое как отношение сопротивления реактивного элемента к активному сопротивлению на резонансной частоте $Q = \frac{X_p}{R}$. На этой частоте сопротивления индуктивности и конденсатора равны $X_p = \omega_0 L = \frac{1}{\omega_0 C}$, что в результате дает $\omega_0 = \frac{1}{T}$ и $Q = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}}$. Отсюда легко сделать вывод о том, что добротность колебательного контура численно равна значению амплитудной частотной характеристики соответствующего колебательного звена на резонансной частоте ω_0 :

$$Q = H(\omega_0) = \frac{1}{\sqrt{(1 - T^2 \omega_0^2)^2 + 4\xi^2 T^2 \omega_0^2}} = \frac{1}{2\xi}.$$

Передаточную функцию вида $W_{21}(s)$ получаем для схемы на рис. 1.5, если в качестве выходного сигнала будем рассматривать ток I в последовательном контуре. В том случае, когда необходимо получить УФ, построенный на базе колебательного контура, вы-

ходной сигнал в виде напряжения будем снимать с активного сопротивления R , как показано на рис. 1.6.

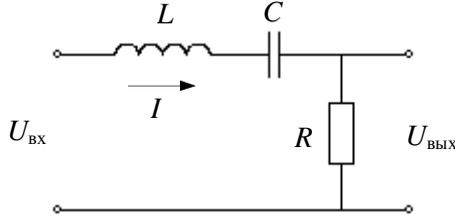


Рис. 1.6

Передаточная функция такого четырехполюсника полностью совпадает с выражением $W_{22}(s)$, а связь постоянной времени фильтра T и коэффициента затухания ξ с параметрами схемы R, L, C осталась неизменной.

Определим полосу пропускания УФ с передаточной функцией $W_{22}(s)$ по условию ослабления амплитудной частотной характеристики до уровня $\frac{1}{\sqrt{2}}$. В соответствии с выражением $W_{22}(s)$ и рис. 1.4 находим значения граничных частот

$$\omega_1 = \frac{\sqrt{\xi^2 + 1} - \xi}{T} \quad \text{и} \quad \omega_2 = \frac{\sqrt{\xi^2 + 1} + \xi}{T}.$$

Абсолютная полоса пропускания

$$\Delta\omega = \omega_2 - \omega_1 = 2\xi\omega_0 = \frac{\omega_0}{Q},$$

как видим, пропорциональна выделяемой частоте и обратно пропорциональна добротности контура. Таким образом, УФ будет более избирательным, если он обладает большей добротностью Q , что соответствует уменьшению коэффициента усиления a в структурной схеме на рис. 1.1 или уменьшению активного сопротивления R в колебательном контуре на рис. 1.6, из-за чего уменьшается коэффициент затухания ξ .

Определенный интерес вызывает вопрос о том, какие фазовые сдвиги возникают в полосе пропускания УФ. Фазовая частотная

характеристика на рис. 1.4 является монотонно убывающей функцией, построенной по выражению

$$\theta(\omega) = \begin{cases} \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} \frac{2\xi T \omega}{1 - T^2 \omega^2}; & 0 < \omega \leq \frac{1}{T} \\ -\frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} \frac{2\xi T \omega}{1 - T^2 \omega^2}; & \frac{1}{T} < \omega \end{cases},$$

с помощью которого получаем значения на граничных частотах:

$$\begin{aligned} \theta(\omega_1) &= \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} \frac{2\xi T \omega_1}{1 - T^2 \omega_1^2} = \frac{\pi}{4}, \\ \theta(\omega_2) &= -\frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} \frac{2\xi T \omega_2}{1 - T^2 \omega_2^2} = -\frac{\pi}{4}. \end{aligned}$$

Отсюда можно сделать вывод, что фазовый сдвиг в полосе пропускания не превышает по абсолютной величине 45 градусов.

1.3. Динамика узкополосного фильтра

Рассмотрим, как протекает процесс установления гармонического сигнала на выходе УФ при нулевых начальных условиях. Для этого необходимо найти обратное преобразование Лапласа от изображения выходного сигнала УФ:

$$y_2(t) = L^{-1} \left[\frac{A_0 \omega_0}{s^2 + \omega_0^2} \cdot \frac{2\xi Ts}{T^2 s^2 + 2\xi Ts + 1} \right],$$

где первый множитель является преобразованием Лапласа входного синусоидального сигнала $u_2(t) = A_0 \sin \omega_0 t$ с частотой $\omega_0 = \frac{1}{T}$.

Решение поставленной задачи облегчается после того, как это выражение приведем к виду

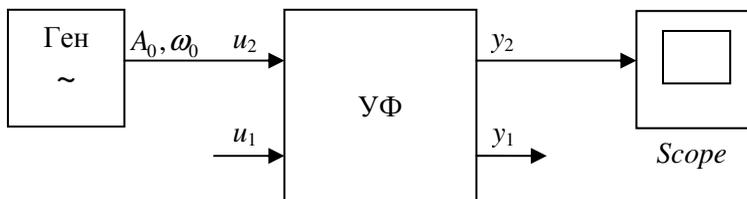
$$\begin{aligned} y_2(t) &= L^{-1} \left[A_0 T \left(\frac{1}{T^2 s^2 + 1} - \frac{1}{T^2 s^2 + 2\xi Ts + 1} \right) \right] = \\ &= A_0 \left[\sin \frac{1}{T} t - \frac{1}{\sqrt{1 - \xi^2}} e^{-\frac{\xi}{T} t} \cdot \sin \frac{\sqrt{1 - \xi^2}}{T} t \right]. \end{aligned}$$

Переходный процесс на выходе представляет собой сумму входного сигнала и затухающей гармонической составляющей с

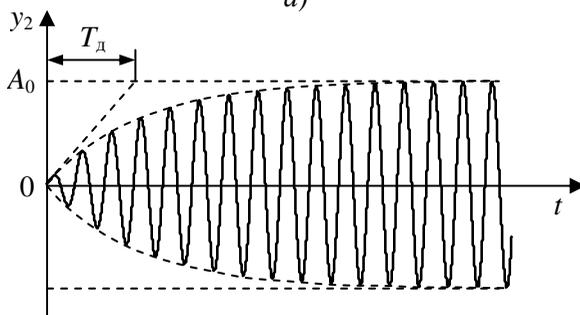
меньшей частотой. Но если $\xi \ll 1$, его приближенно можно описать, заменяя второе слагаемое основной гармоникой:

$$y_2(t) \approx A_0 \left(1 - e^{-\frac{\xi}{T} t} \right) \sin \omega_0 t .$$

Из этого выражения следует, что амплитуда гармонического сигнала на выходе должна экспоненциально возрастать с постоянной времени $T_d = \frac{T}{\xi}$, что и подтверждается осциллограммой, полученной с помощью схемы на рис. 1.7, а и приведенной на рис. 1.7, б.



а)



б)

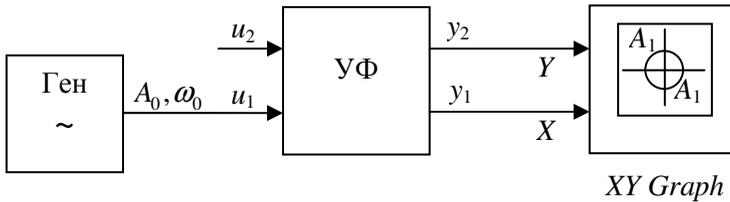
Рис. 1.7

В результате проведенного анализа можно сделать важный вывод о том, что увеличение добротности УФ, связанное с уменьшением коэффициента затухания, приводит к увеличению времени установления выходного сигнала, из-за чего возникает противоречие между такими важными характеристиками фильтра, как избирательность и быстродействие, которое потребует компромиссного решения.

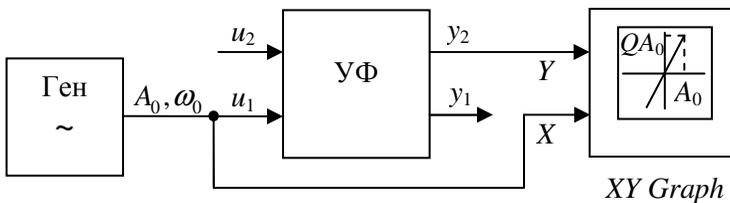
1.4. Экспериментальная проверка правильности расчета и настройки УФ

При расчете параметров УФ исходными данными являются выделяемая частота гармоники $f_0 = \frac{\omega_0}{2\pi}$ и добротность Q . Из приведенной методики исследования УФ по структурной схеме на рис. 1.1 следует, что значения коэффициентов K_1 и K_2 определяются частотой ω_0 , а коэффициенты a и b зависят от добротности Q .

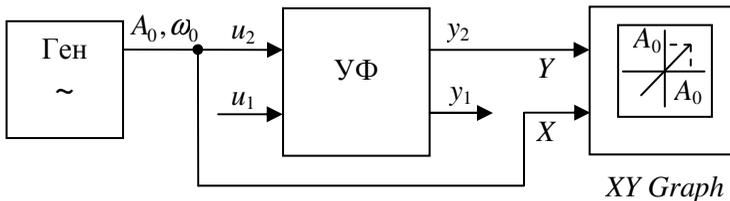
Правильность расчета и настройки УФ можно проверить по фигурам Лиссажу с помощью опытов, схемы проведения которых представлены на рис. 1.8 а, б, в.



а)



б)



в)

Рис. 1.8

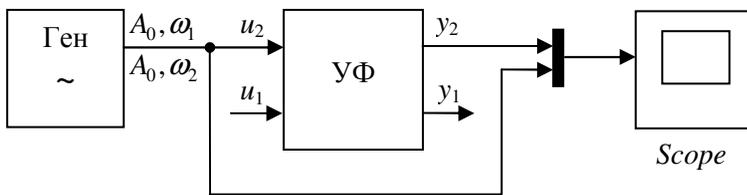
В схеме на рис. 1.8, *а* на вход u_1 УФ подается сигнал с генератора синусоидальных колебаний с заданной частотой ω_0 и амплитудой A_0 , а выходные сигналы УФ y_1 и y_2 поступают соответственно на входы X и Y осциллографа. Для правильных значений коэффициентов K_1 и K_2 фигура Лиссажу на экране осциллографа должна представлять собой окружность.

В схеме на рис. 1.8, *б*, в отличие от предыдущей схемы, на вход X осциллографа подается входной сигнал с генератора. На экране осциллографа будем наблюдать фигуру Лиссажу в виде отрезка прямой линии (это также говорит о правильности настройки фильтра на заданную частоту), тангенс угла наклона которой зависит от коэффициента a и должен быть равен заданному значению добротности Q .

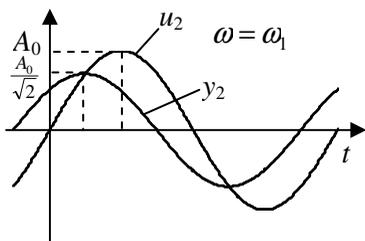
В следующей схеме на рис. 1.8, *в* синусоидальный сигнал с амплитудой A_0 и частотой ω_0 поступает с генератора на вход u_2 УФ и вход X осциллографа, а на вход Y осциллографа, как и во всех предыдущих схемах, подается сигнал с выхода y_2 УФ. В этом случае необходимо получить для отрезка прямой, наблюдаемой на экране осциллографа, единичный наклон, т.е. под углом 45° , установив нужное значение коэффициента b .

Следует отметить, что для цифровой реализации УФ по структурной схеме на рис. 1.1 правильный расчет коэффициентов K_1 , K_2 , a , b и занесение их в цифровую модель сразу обеспечивает получение требуемых фигур на экране осциллографа в соответствии со схемами на рис. 1.8. Однако при аналоговой реализации на операционных усилителях УФ может быть настроен и без предварительного расчета с помощью трех схем, приведенных на рис. 1.8, варьируя положения движков потенциометров, отвечающих за значения коэффициентов в схеме.

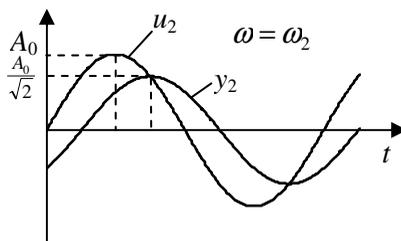
Рассмотрим, как на практике можно подтвердить теоретические положения, касающиеся полосы пропускания УФ. Для этого используется схема снятия частотных характеристик, представленная на рис. 1.9, *а*, в которой на вход u_2 УФ подается сигнал от генератора синусоидальных колебаний с амплитудой A_0 на граничной частоте ω_1 или ω_2 , а на осциллографе в режиме снятия временных характеристик одновременно наблюдаются входной и выходной сигналы фильтра.



a)



б)



в)

Рис. 1.9

Как было показано выше, на частоте ω_1 амплитуда выходного сигнала y_2 в $\sqrt{2}$ раз должна быть меньше амплитуды входного сигнала при сдвиге по фазе $+45^\circ$, а на частоте ω_2 должен измениться только сдвиг по фазе и составить -45° . В результате получаем осциллограммы, представленные на рис. 1.9, б и рис. 1.9, в, соответствующие граничным частотам ω_1 или ω_2 , тогда как на частоте ω_0 входная и выходная синусоиды обязаны совпадать.

1.5. Задание и порядок выполнения работы

1. По заданному значению частоты f_0 и добротности $Q=10$ рассчитать параметры структурной схемы УФ, представленной на рис. 1.1.

2. Создать модель УФ в среде *Simulink*.

3. Собрать схему, представленную на рис. 1.8, а, и с ее помощью проверить правильность настройки фильтра на заданную частоту.

4. Собрать схему, представленную на рис. 1.8, б. Получить нужный наклон отрезка прямой на экране осциллографа, равный заданной добротности.

5. С помощью схемы на рис. 1.8, в показать, что УФ в рабочем канале (u_2 , y_2) имеет единичный коэффициент усиления без сдвига по фазе на заданной частоте.

6. В соответствии со схемой, приведенной на рис. 1.7, а, экспериментально определить время переходного процесса установления выходного гармонического сигнала УФ и сравнить его с теоретическим значением $3T_d$.

7. Рассчитать значения граничных частот полосы пропускания УФ в соответствии с заданным вариантом.

8. Собрать схему снятия частотных характеристик, представленную на рис. 1.9, а, и для граничных частот ω_1 и ω_2 получить в установившемся режиме осциллограммы, подобные приведенным на рис. 1.8, б и 1.8, в.

9. Установить в схеме УФ значения коэффициентов a и b , соответствующие добротности $Q=100$. Повторить эксперимент п. 6 для фильтра с новой добротностью и сделать выводы.

10. Рассчитать новые значения граничных частот полосы пропускания УФ. С помощью эксперимента, аналогичного п. 8, показать, как фильтр с добротностью $Q=100$ пропускает гармоники на прежних граничных частотах.

Вопросы для подготовки к работе

1. Дайте определение узкополосного фильтра.
2. Как определяется полоса пропускания УФ?
3. Как определяется добротность УФ?
4. Изобразите вид желаемых логарифмических частотных характеристик УФ.
5. Напишите выражение передаточной функции УФ.
6. Какие параметры в структурной модели УФ отвечают за настройку на заданную частоту?
7. Каким образом в структурной модели УФ устанавливается заданная добротность?
8. Как выбирается значение коэффициента усиления “ b ” для структурной модели УФ?

9. Какое реальное физическое устройство может быть использовано в качестве УФ?

10. Какие сдвиги по фазе могут возникать в полосе пропускания УФ?

11. Каким образом в работе предлагается проверить правильность настройки УФ:

а) на заданную частоту;

б) обладающего требуемой добротностью;

в) имеющего единичный коэффициент передачи для заданной частоты?

12. Как связаны между собой ширина полосы пропускания, добротность и быстродействие УФ?

Лабораторная работа № 2

ИССЛЕДОВАНИЕ СПЕКТРОВ ПЕРИОДИЧЕСКИХ СИГНАЛОВ

Цель работы – овладение инженерными методами спектрально-го анализа динамических процессов.

Работа посвящена определению спектров периодических сигналов экспериментальным путем с помощью узкополосного фильтра. При этом появляется возможность сравнить практические результаты с теоретическим разложением периодических сигналов $y(t) = y(t + T_n)$ в ряд Фурье

$$y(t) = \frac{b_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \sin n\omega t + b_n \cos n\omega t),$$

где $\omega = \frac{2\pi}{T_n}$, а коэффициенты разложения при замене $\omega t = \psi$ вычисляются следующим образом:

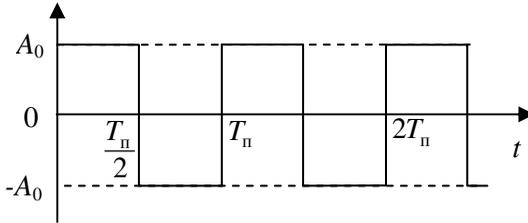
$$b_0 = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} y(\psi) d\psi;$$
$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} y(\psi) \sin n\psi d\psi;$$
$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} y(\psi) \cos n\psi d\psi.$$

2.1. Теоретический анализ периодических сигналов

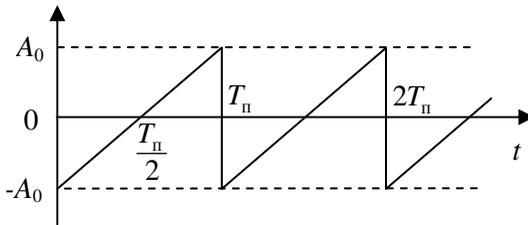
В качестве примеров рассмотрим три типа периодических сигналов, представленных на рис. 2.1, *a*, *б*, *в*.

Разложим в ряд Фурье первый сигнал прямоугольной формы, имеющий название “меандр”. Поскольку функция $y(t)$ является нечетной, то коэффициенты b_0 и b_n равны нулю, а коэффициенты a_n вычисляются по формуле

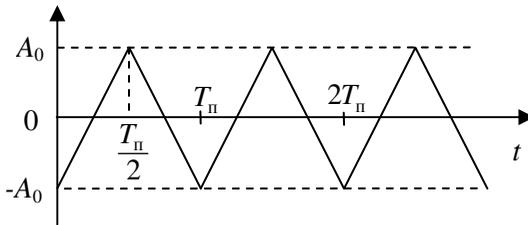
$$a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} A_0 \sin n\psi d\psi = \frac{2A_0}{\pi n} (1 - (-1)^n).$$



a)



б)



в)

Рис. 2.1

Из полученного выражения следует, что в спектре этого сигнала содержатся только нечетные гармоники, представленные на рис. 2.2, а.

Пилообразный сигнал на рис. 2.1, б также является нечетной функцией, для которой коэффициенты разложения в ряд находим следующим образом:

$$a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} A_0 \left(\frac{\psi}{\pi} - 1 \right) \sin n\psi d\psi = -\frac{2A_0}{\pi n}.$$

В спектре такого сигнала имеются все гармонические составляющие, а отрицательный знак коэффициентов a_n означает сдвиг по фазе соответствующих синусоид на 180° , что и отражено на рис. 2.2, б.

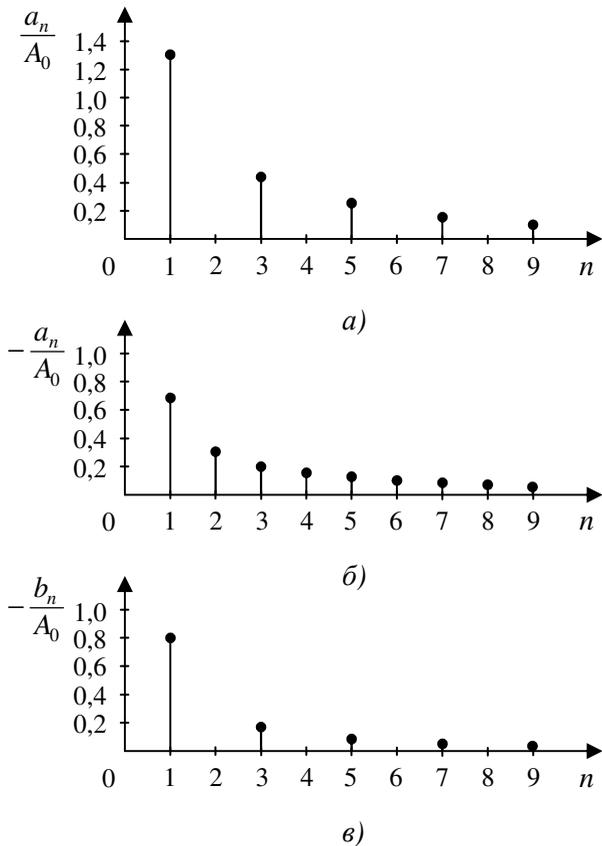


Рис. 2.2

Сигнал треугольной формы на рис. 2.1, в описывается четной функцией со средним значением на периоде равным нулю, из-за чего $a_n = 0$ и $b_0 = 0$, тогда как для коэффициентов b_n получаем выражение

$$b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} A_0 \left(\frac{2\psi}{\pi} - 1 \right) \cos n\psi d\psi = \frac{4A_0}{\pi^2 n^2} \left((-1)^n - 1 \right).$$

На рис. 2.2, в представлен спектр этого сигнала, содержащий нечетные инвертированные косинусные составляющие.

2.2. Экспериментальное определение спектров периодических сигналов

Вначале рассмотрим наиболее простой способ получения в среде *Simulink* приведенных периодических сигналов. Для формирования сигнала прямоугольной формы будем использовать генератор импульсов, представленный на рис. 2.3, а, но, поскольку он выдает только положительные импульсы, его выходной сигнал нужно сместить на величину $-A_0$.

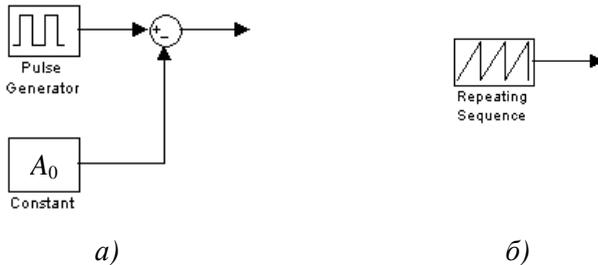


Рис. 2.3

В окне задания параметров генератора устанавливаем величину импульсов равную $2A_0$ и значение периода T_n , а 50 % ширины импульса от периода и нулевой сдвиг по фазе оставляем.

Кусочно-линейные периодические сигналы легко реализуются с помощью генератора, приведенного на рис. 2.3, б. Так, чтобы получить пилообразную последовательность (рис. 2.1, б), достаточно, открыв окно параметров этого генератора, задать в строке времени вектор $[0 \ T_n]$, а в строке выходных значений – вектор $[-A_0 \ A_0]$.

Периодический сигнал треугольной формы (рис. 2.1, в) получаем при задании в строке времени вектора $\left[0 \ \frac{T_n}{2} \ T_n \right]$ и в строке выходных значений вектора $[-A_0 \ A_0 \ -A_0]$.

Опыты по исследованию спектров рассматриваемых сигналов проведем в соответствии со схемой, показанной на рис. 2.4.

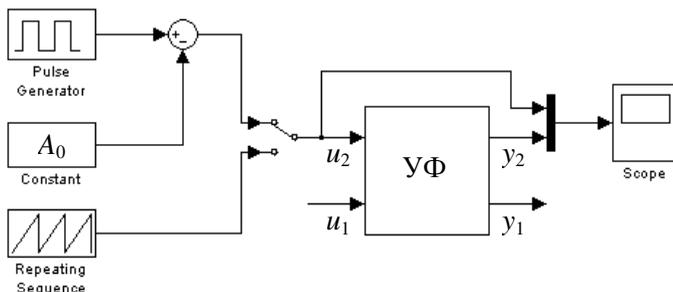


Рис. 2.4

В зависимости от изучаемого сигнала ко входу УФ подключаем один из генераторов, а на осциллографе одновременно наблюдаем исходный сигнал и его гармоническую составляющую. Узкополосный фильтр, настроенный на частоту $\omega_0 = \frac{2\pi}{T_{\Pi}}$, успешно выделяет первую гармонику при значении добротности $Q=10$, что позволяет достаточно точно измерить ее амплитуду.

Для выделения других гармонических составляющих УФ необходимо перестраивать на новые частоты, изменяя его параметры K_1 , K_2 , a , b (см. лабораторную работу № 1). Однако фильтр с добротностью $Q=10$ выделяет из периодического сигнала, например прямоугольной формы, третью, пятую, седьмую и т.д. гармоники со значительными искажениями, не позволяющими точно измерить их амплитуды. Приведенные утверждения иллюстрируются с помощью осциллограмм на рис. 2.5.

Эти искажения связаны с недостаточной избирательностью УФ, пропускающего на выход соседние гармоники. В рассматриваемых примерах наибольший вклад в искажения вносят низкочастотные “соседи”.

Поскольку при исследовании спектров в данной лабораторной работе быстродействие УФ не является критической характеристикой, то для устранения искажений гармоник увеличим его добротность до значения $Q=100$. При переходе от добротности $Q=10$ к $Q=100$ уменьшаем в 10 раз коэффициенты a и b УФ. В результате

получаем практически идеальную фильтрацию гармонических составляющих, поддающихся измерению, что подтверждается осциллограммами на рис. 2.6.

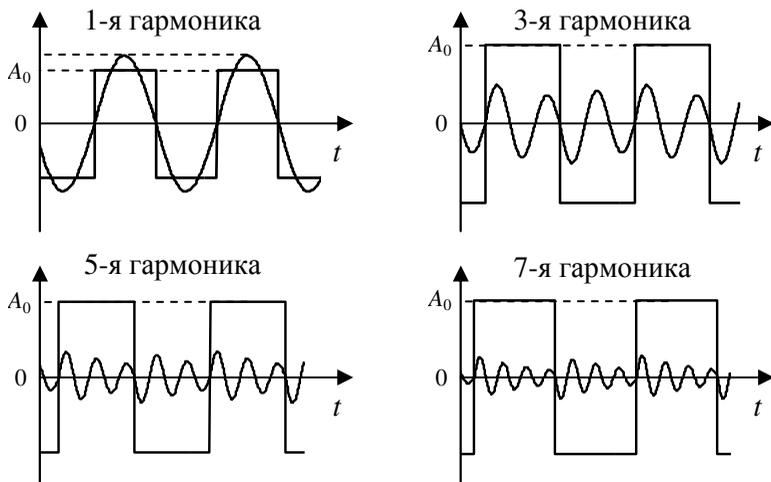


Рис. 2.5

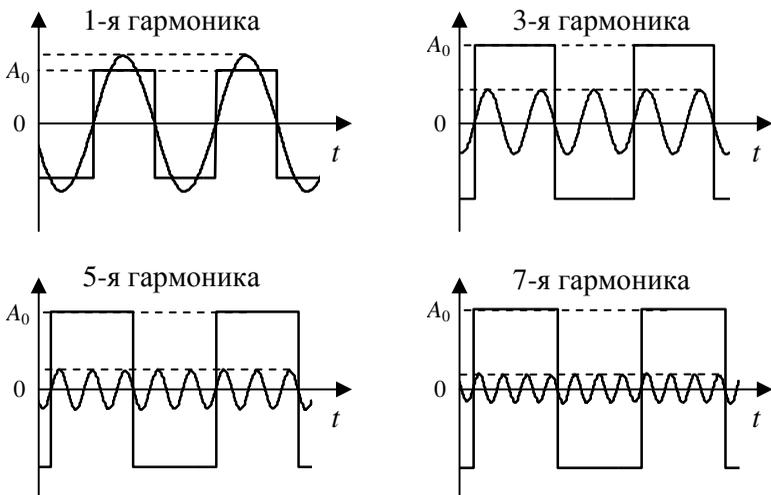


Рис. 2.6

Отметим, что исследовать спектры периодических сигналов можно и с помощью другой методики, когда параметры УФ остаются постоянными, а изменяется, если это возможно, лишь частота входного сигнала. Так, например, если нужно выделить третью гармонику с помощью УФ, настроенного на первую гармонику, увеличиваем в три раза период изучаемого сигнала. Такая методика особенно удобна, если УФ реализован на аналоговых элементах, поскольку его настройка является достаточно трудоемким процессом.

2.3. Восстановление периодического сигнала

Так как в разложении в ряд Фурье периодических сигналов присутствует бесчисленное множество гармонических составляющих, то процедура восстановления исходного сигнала по ограниченному числу гармоник всегда будет давать приближенный результат. Схема проведения опытов по восстановлению сигналов прямоугольной формы представлена на рис. 2.7, а.

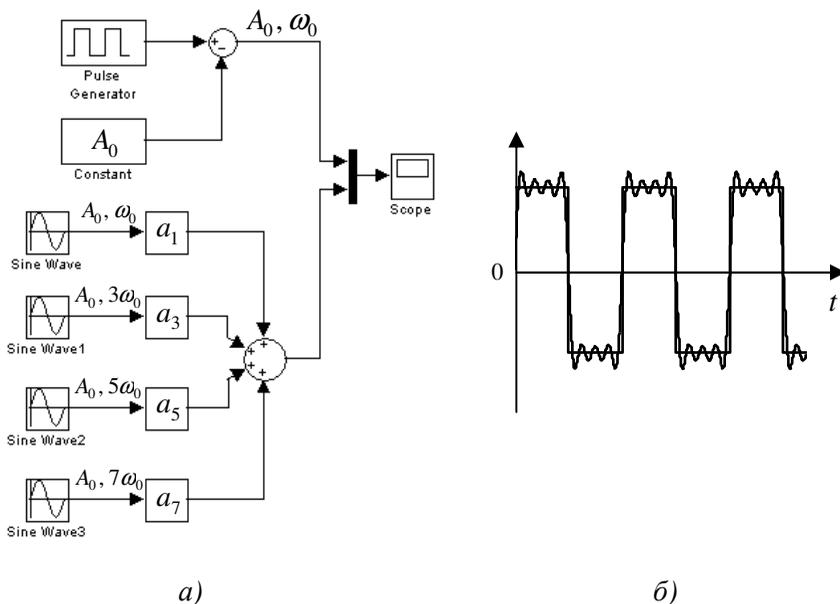


Рис. 2.7

Гармонические составляющие формируем с помощью генераторов синусоидальных колебаний, настроенных на соответствующие частоты. Несмотря на то, что в окне параметров генератора “*Sine wave*” можно установить необходимое значение амплитуды гармоники, для наглядности вынесем это значение в виде коэффициента усиления выходного сигнала генератора. Тогда на всех генераторах, участвующих в восстановлении сигнала, устанавливаем значение амплитуды, равное амплитуде A_0 исходного сигнала. С помощью осциллографа имеем возможность сравнивать исходный сигнал с восстановленным. На рис. 2.7, б приведен результат сложения первых четырех гармоник прямоугольного сигнала, который уже дает достаточно хорошее приближение к исходному сигналу.

При восстановлении сигнала треугольной формы потребуются косинусные составляющие, которые также получим с генераторов “*Sine wave*”, устанавливая сдвиг по фазе, равный $\frac{\pi}{2}$.

2.4. Задание и порядок выполнения работы

1. Сформировать три типа периодических сигналов (см. рис. 2.1) с помощью генераторов, приведенных на рис. 2.3, а, б. Для амплитуды A_0 может быть выбрано удобное значение, а период T_n должен соответствовать частоте ω_0 узкополосного фильтра в лабораторной работе № 1.

2. При выделении n -й гармонической составляющей периодического сигнала рассчитать, какой вклад вносят соседние гармоники в выходной сигнал УФ с добротностью $Q = 10$, выраженный в процентах. Номер гармоники n и вид периодического сигнала задает преподаватель.

3. Провести исследование спектра сигнала прямоугольной формы по схеме на рис. 2.4 для двух значений добротности УФ $Q = 10$ и $Q = 100$. В отчет по данной работе поместить осциллограммы, полученные по ходу выполнения эксперимента, а итоговые результаты измерения амплитуд гармонических составляющих представить в сравнении с теоретическими данными с помощью таблицы и графика, показанного на рис. 2.2.

4. Выполнить аналогичную работу для пилообразного сигнала.

5. Аналогично проанализировать сигнал треугольной формы.

6. Восстановить сигнал прямоугольной формы по нескольким гармоническим составляющим. В отчете представить схему восстановления и наблюдаемую осциллограмму.

7. Восстановить по нескольким гармоникам пилообразный сигнал. Отчетный материал, как в п. 6.

8. Восстановить сигнал треугольной формы с помощью нескольких гармонических составляющих. Отчетный материал, как в п. 6.

9. Предложите схему компенсации искажений, возникающих в выходном сигнале УФ с $Q=10$ при выделении n -й гармоники, и подтвердите ее работоспособность моделированием в соответствии с примером, заданном в п. 2.

Вопросы для подготовки к работе

1. Какой вид принимает разложение в ряд Фурье периодической функции, симметричной относительно начала координат?

2. Какой вид принимает разложение в ряд Фурье периодической функции, симметричной относительно оси ординат?

3. В каком случае спектр сигнала представляется дискретной функцией?

4. Изобразите структурную схему проведения опытов по исследованию спектров сигналов.

5. Почему возникают искажения гармонических составляющих при выделении их из периодического сигнала?

6. Какие способы уменьшения искажений предлагаются в данной работе?

7. Изобразите структурную схему восстановления периодического сигнала по его гармоническим составляющим.

Лабораторная работа № 3

ГАРМОНИЧЕСКАЯ ЛИНЕАРИЗАЦИЯ НЕЛИНЕЙНОСТЕЙ

Цель работы – получить практические навыки в исследовании нелинейных элементов.

3.1. Теоретические основы метода гармонической линеаризации

Предположим, что на вход безынерционного нелинейного элемента, имеющего статическую характеристику $y = F(x)$, подается гармонический сигнал $x(t) = A \sin \omega t$. Тогда на выходе получим периодический сигнал $y(t) = F(A \sin \omega t)$, который в общем случае может иметь постоянную составляющую y_0 и гармонические составляющие с частотами, кратными частоте входного сигнала.

Метод гармонической линеаризации заключается в замене входного сигнала первой гармоникой его разложения в ряд Фурье

$$y(t) \approx y_0 + A_1 \sin \omega t + B_1 \cos \omega t.$$

Для симметричных относительно начала координат нелинейностей, иначе говоря нечетных функций $y = F(x) = -F(-x)$, постоянная составляющая $y_0 = 0$. Таким нелинейным характеристикам и будет уделено основное внимание в данной работе.

В том случае, если нелинейная характеристика является однозначной функцией, сдвиг по фазе между входным и выходным сигналом не возникает:

$$y(t) \approx A_1 \sin \omega t.$$

Для неоднозначных нелинейных характеристик наличие фазового сдвига реализуем, учитывая обе составляющие первой гармоники:

$$y(t) \approx A_1 \sin \omega t + B_1 \cos \omega t.$$

В рассматриваемом методе используется понятие коэффициентов гармонической линеаризации, зависящих от амплитуды входного сигнала, $a(A) = \frac{A_1}{A}$ и $b(A) = \frac{B_1}{A}$, с помощью которых отражается одно из основных свойств нелинейных элементов из-

менять коэффициент усиления в зависимости от величины входного сигнала. Формулы для вычисления указанных коэффициентов получаем на основе минимизации среднеквадратического отклонения на периоде гармоникалинеаризованного выходного сигнала от его точного выражения $y(t) = F(A \sin \omega t)$. Оказывается, что этому условию соответствуют формулы разложения в ряд Фурье

$$a(A) = \frac{1}{\pi A} \int_0^{2\pi} F(A \sin \psi) \sin \psi d\psi,$$

$$b(A) = \frac{1}{\pi A} \int_0^{2\pi} F(A \sin \psi) \cos \psi d\psi,$$

где $\psi = \omega t$.

Эквивалентную передаточную функцию нелинейного элемента удобно представить в комплексной форме

$$J(A) = a(A) + jb(A) = q(A)e^{j\mu(A)},$$

где $q(A) = \sqrt{a^2(A) + b^2(A)}$ – коэффициент усиления входного сигнала, а $\mu(A) = \operatorname{arctg} \frac{b(A)}{a(A)}$ – сдвиг по фазе.

Учитывая приведенные выражения, выходной сигнал гармоническилинеаризованного нелинейного элемента можем описать в следующем виде:

$$y(t) \approx Aq(A)\sin(\omega t + \mu(A)).$$

3.2. Примеры гармоническойлинеаризации нелинейностей

Вначале рассмотрим однозначную симметричную относительно начала координат нелинейную характеристику типа “зона насыщения”, представленную на рис. 3.1, а.

При подаче на вход такого элемента сигнала $x = A \sin \psi$ на выходе получим периодический сигнал $y = F(A \sin \psi)$ с нулевой постоянной составляющей, приведенный на рис. 3.1, б. Поскольку нелинейная характеристика однозначная, потребуется вычислять только один коэффициент:

$$a(A) = \frac{1}{\pi A} \int_0^{2\pi} F(A \sin \psi) \sin \psi d\psi = \frac{4}{\pi A} \left[\int_0^{\psi_1} A \frac{c}{d} \sin^2 \psi d\psi + \int_{\psi_1}^{\frac{\pi}{2}} c \sin \psi d\psi \right],$$

где $\psi_1 = \arcsin \frac{d}{A}$ и $A \geq d$, а $b(A) = 0$ и $\mu(A) = 0$.

В результате интегрирования получаем

$$J(A) = a(A) = q(A) = \frac{2c}{\pi d} \left(\arcsin \frac{d}{A} + \frac{d}{A} \sqrt{1 - \frac{d^2}{A^2}} \right) \text{ при условии } A \geq d.$$

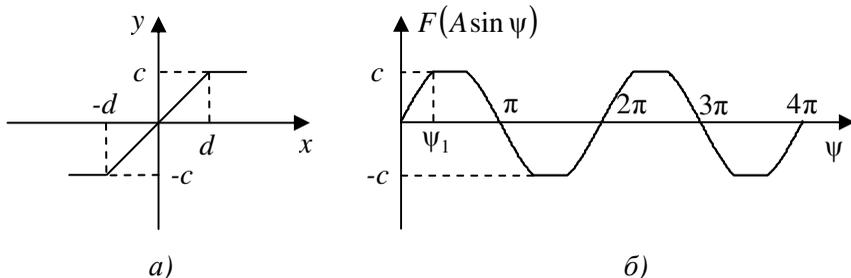


Рис. 3.1

С помощью этого выражения строим график зависимости коэффициента усиления гармонически линеаризованного нелинейного элемента от амплитуды входного сигнала, показанный на рис. 3.2.

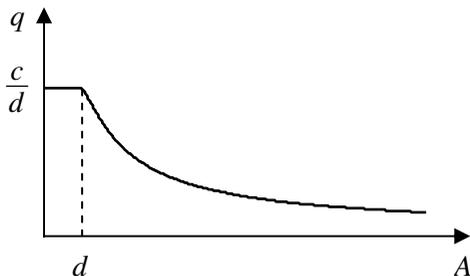


Рис. 3.2

Как видим из этого графика, коэффициент усиления нелинейного элемента убывает с ростом амплитуды входного сигнала, а на линейном участке, где $A \leq d$, он остается постоянным.

В качестве второго примера рассмотрим гармоническую линейризацию двухпозиционного реле с гистерезисом, обладающего симметричной статической характеристикой, приведенной на рис. 3.3, а.

Подавая на вход реле синусоидальное воздействие, получим на выходе периодический сигнал также с нулевой постоянной составляющей, но со сдвигом по фазе, как показано на рис. 3.3, б. Это означает, что необходимо вычислять оба коэффициента гармонической линейризации:

$$a(A) = \frac{1}{\pi A} \int_0^{2\pi} F(A \sin \psi) \sin \psi d\psi = \frac{2}{\pi A} \left[- \int_0^{\psi_1} c \sin \psi d\psi + \int_{\psi_1}^{\pi} c \sin \psi d\psi \right];$$

$$b(A) = \frac{1}{\pi A} \int_0^{2\pi} F(A \sin \psi) \cos \psi d\psi = \frac{2}{\pi A} \left[- \int_0^{\psi_1} c \cos \psi d\psi + \int_{\psi_1}^{\pi} c \cos \psi d\psi \right],$$

где $\psi_1 = \arcsin \frac{d}{A}$ и $A \geq d$.

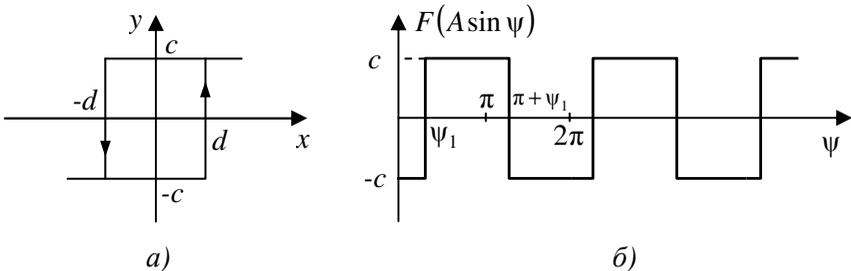


Рис. 3.3

Интегрируя последние выражения, получим

$$a(A) = \frac{4c}{\pi A} \sqrt{1 - \frac{d^2}{A^2}},$$

$$b(A) = -\frac{4cd}{\pi A^2}.$$

Тогда коэффициент усиления нелинейного элемента $q(A) = \frac{4c}{\pi A}$,

а фазовый сдвиг $\mu(A) = -\arctg \frac{d}{A \sqrt{1 - \frac{d^2}{A^2}}}$.

На рис. 3.4 представлены их графики в зависимости от амплитуды входного сигнала, из которых следует, что при $A < d$ обе функции не определены, а для $A > d$ с ростом амплитуды входного сигнала коэффициент усиления и запаздывание уменьшаются.

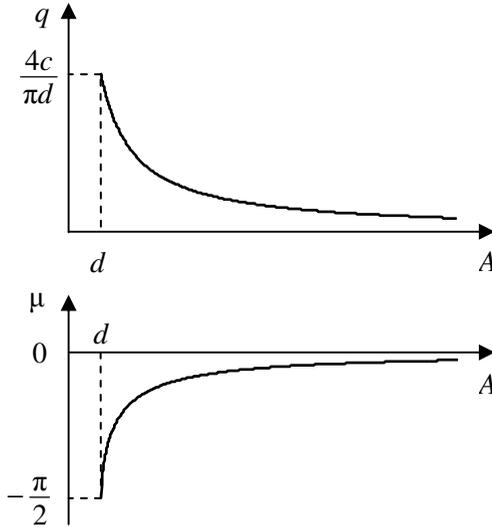


Рис. 3.4

Подробная информация с дополнениями, касающаяся гармонической линейзации нескольких типовых нелинейностей, представлена в приложении.

3.3. Гармоническая линейзация на основе эксперимента

Амплитудную характеристику нелинейного элемента $q(A)$ и фазовый сдвиг $\mu(A)$ также можем определить экспериментальным путем с помощью схемы, приведенной на рис. 3.5.

На вход исследуемого нелинейного элемента подаем синусоидальное воздействие с амплитудой A и частотой ω_0 , на которую настроен узкополосный фильтр. Значение частоты ω_0 не является принципиальным, поскольку коэффициенты гармонической линейзации от нее не зависят. На выходе нелинейного элемента образуется периодический сигнал, из которого УФ выделяет первую гармонику. С помощью осциллографа одновременно наблюдаем

три сигнала и имеем возможность, варьируя амплитуду входной синусоиды, измерять амплитуду и сдвиг по фазе первой гармоники на выходе УФ.

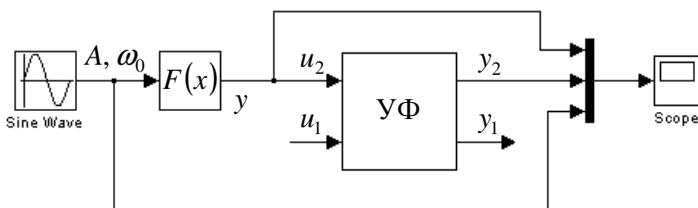


Рис. 3.5

Полученная информация в виде отношения амплитуд первой гармоники к амплитудам входного сигнала и измеренных сдвигов по фазе может быть представлена для сравнения совместно с теоретическими графиками, подобными показанным на рис. 3.2 и 3.4. Так как процедура гармонической линейзации связана с выделением только первой гармоники, то для достижения хорошего совпадения с теоретическими результатами достаточно использовать УФ с добротностью $Q = 10$.

В данной работе в соответствии с заданием преподавателя предлагается исследовать еще некоторые типы нелинейных характеристик, представленные в приложении, помимо двух рассмотренных в примерах.

3.4. Задание и порядок выполнения работы

1. Собрать структурную схему проведения экспериментов с заданным нелинейным элементом (рис. 3.5), в которой будем использовать УФ, рассчитанный в лабораторной работе № 1.

2. Для нескольких значений амплитуды входного сигнала (не менее пяти) получить осциллограммы в установившемся режиме, по которым произвести измерения амплитуд сигнала на выходе УФ и сдвигов по фазе, если они возникают.

3. Результаты измерений поместить в таблицу, где также представить экспериментальное значение $q_s(A)$ и $\mu_s(A)$ в сравнении с теоретическими $q_T(A)$ и $\mu_T(A)$.

4. Построить теоретические графики $q_T(A)$ и $\mu_T(A)$ и нанести на них экспериментальные значения.

5. Повторить указанные в пп. 1 – 4 процедуры для других, заданных преподавателем типов нелинейных характеристик.

6. В отчете должна быть приведена схема проведения эксперимента, представлены осциллограммы, по которым проводились измерения, таблицы и графики.

Вопросы для подготовки к работе

1. Что означает “гармоническая линейаризация нелинейности”?

2. В каком случае не возникает фазовый сдвиг между входным синусоидальным сигналом нелинейного элемента и первой гармоникой на его выходе?

3. Из-за чего возникает фазовый сдвиг в гармонически линейаризованном нелинейном элементе?

4. Приведите примеры, когда коэффициент усиления гармонически линейаризованного нелинейного элемента с ростом амплитуды входного сигнала:

а) монотонно убывает;

б) монотонно возрастает;

в) имеет экстремум.

5. Предложите схему экспериментальной проверки теоретических результатов гармонической линейаризации нелинейности.

Лабораторная работа № 4

ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА ГАРМОНИЧЕСКОГО БАЛАНСА К АНАЛИЗУ УСТОЙЧИВОСТИ НЕЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ С СИММЕТРИЧНЫМИ НЕЛИНЕЙНОСТЯМИ И УСТОЙЧИВЫМИ ОБЪЕКТАМИ

Цель работы – научиться на практике пользоваться методом гармонического баланса для анализа устойчивости нелинейных систем.

4.1. Условия применимости метода гармонического баланса

Метод гармонического баланса относится к приближенным методам исследования нелинейных систем. Он позволяет отыскивать периодические решения в замкнутом контуре с единичной отрицательной обратной связью (рис. 4.1), содержащем последовательно соединенные безынерционную нелинейную характеристику $F(x)$ и линейную динамическую часть системы с передаточной функцией $W(s)$.

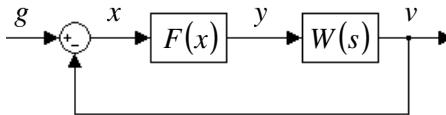


Рис. 4.1

К такому виду реальную нелинейную систему приводят, используя эквивалентные структурные преобразования над линейной частью автономной системы. Место приложения входного сигнала и где оказывается прежний выход особого значения не имеет, поскольку в методе гармонического баланса рассматривается свободное движение.

Считая, что на входе нелинейного элемента действует сигнал $x(t) = A \sin \omega t$, с помощью метода гармонической линеаризации определяем эквивалентную передаточную функцию нелинейного элемента $J(A)$. А так как сигнал $x(t) = -v(t)$ для автономной систе-

мы, то линейная часть системы должна хорошо подавлять высшие гармонические составляющие, содержащиеся в периодическом сигнале $y(t) = F(A \sin \omega t)$. В том случае, если сигнал на выходе линейной части мало похож на гармонический, что свидетельствует о недостаточной фильтрации первой гармоники, применение метода гармонического баланса для исследования нелинейной системы может дать значительные погрешности.

Из характеристического уравнения гармонически линеаризованной системы получаем уравнение Гольдфарба

$$-\frac{1}{J(A)} = W(j\omega),$$

с помощью которого определяются условия возникновения периодического движения в системе, иначе называемого автоколебательным процессом.

Это уравнение распадается на два уравнения, имеющих названия “баланс амплитуд”

$$\frac{1}{q(A)} = H(\omega)$$

и “баланс фаз”

$$-\pi - \mu(A) = \theta(\omega).$$

4.2. Решение уравнения Гольдфарба на комплексной плоскости

Один из способов отыскания решения уравнения Гольдфарба заключается в построении на комплексной плоскости годографа передаточной функции $W(j\omega)$ совместно с годографом нелинейного элемента $-\frac{1}{J(A)}$. В точках пересечения годографов возможны автоколебания, а если пересечения отсутствуют, то периодического решения нет.

Однако когда пересечения существуют, автоколебательный процесс может оказаться как устойчивым, так и неустойчивым. Этот вопрос решается с помощью критерия устойчивости Найквиста, приспособленного к исследованию гармонически линеаризованной системы.

В обычном виде критерий устойчивости Найквиста требует построения годографа разомкнутой системы $J(A) \cdot W(j\omega)$ и подсчета

оборотов вокруг критической точки (-1) . Но гораздо удобнее в качестве критических точек использовать точки пересечения годографов $-\frac{1}{J(A)}$ и $W(j\omega)$, являющиеся аналогами точки (-1) .

В качестве примера рассмотрим случай, представленный на рис. 4.2, когда имеются две точки пересечения годографа нелинейного элемента с годографом передаточной функции линейной части.

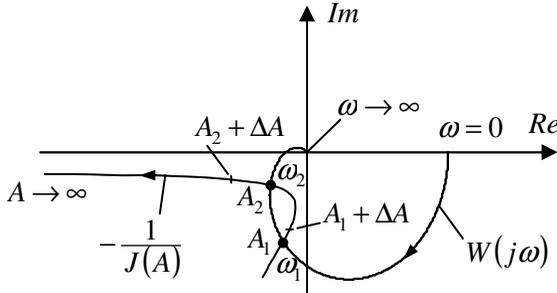


Рис. 4.2

Напомним, что стрелки на годографах $W(j\omega)$ и $-\frac{1}{J(A)}$ показывают направление роста их аргументов, соответственно частоты ω и амплитуды A .

Исследуем устойчивость автоколебаний в первой точке пересечения годографов с параметрами A_1 и ω_1 . Если даем небольшое положительное приращение ΔA амплитуде A_1 , то получаем смещение исследуемой точки по кривой $-\frac{1}{J(A)}$ внутрь годографа $W(j\omega)$. Это означает, что годограф $W(j\omega)$ охватывает критическую точку и замкнутая система становится неустойчивой, из-за чего амплитуда колебаний продолжает возрастать, удаляясь от первого положения равновесия.

Когда даем отрицательное приращение ΔA в точке A_1 , смещение происходит в область, где нет охвата годографом $W(j\omega)$ исследуемой точки. В этом случае замкнутая система оказывается

устойчивой, и амплитуда колебаний уменьшается, также удаляясь от первого положения равновесия.

Таким образом, можно сделать вывод о том, что первое решение уравнения Гольдфарба является неустойчивым, и автоколебания на частоте ω_1 с амплитудой A_1 наблюдаться не будут.

Подобным образом исследуем второе решение с параметрами A_2 и ω_2 . Положительное приращение амплитуды ΔA в точке A_2 выводит из-под охвата годографом $W(j\omega)$ исследуемую точку, делая замкнутую систему устойчивой, что заставляет амплитуду колебаний уменьшаться до значения A_2 .

Отрицательное приращение ΔA в точке A_2 приводит к охвату исследуемой точки годографом $W(j\omega)$, и замкнутая система становится неустойчивой, заставляя амплитуду колебаний возрасти до значения A_2 . Отсюда следует, что второе решение уравнения Гольдфарба является устойчивым, и автоколебательный процесс на частоте ω_2 с амплитудой A_2 может существовать.

4.3. Решение уравнения Гольдфарба с помощью ЛАФЧХ и шаблонов

Другой метод решения уравнения Гольдфарба связан с построением логарифмических амплитудной и фазовой частотных характеристик линейной части системы и шаблонов для нелинейностей. Понятие шаблона для нелинейности возникает из уравнений баланса амплитуд и фаз, переведенных в логарифмические масштабы:

$$L(\omega) = 20 \lg H(\omega) = 20 \lg \frac{1}{q(A)},$$

$$\theta(\omega) = -\pi - \mu(A).$$

Характеристики нелинейного элемента приводятся к нормированному виду

$$20 \lg \frac{1}{q(A)} = 20 \lg \frac{1}{Nq_0 \left(\frac{d}{A} \right)} = -20 \lg N + 20 \lg \frac{1}{q_0 \left(\frac{d}{A} \right)},$$

$$-\pi - \mu(A) = -\pi - \mu_0 \left(\frac{d}{A} \right),$$

где N – нормирующий множитель, d – параметр нелинейности по

оси абсцисс. Выражения $20\lg\frac{1}{q_0\left(\frac{d}{A}\right)}$ и $\left(-\pi - \mu_0\left(\frac{d}{A}\right)\right)$ зависят

только от типа нелинейности и не зависят от ее конкретных параметров, что позволяет получить неизменные шаблоны для каждого типа нелинейности. Учет параметров нелинейного элемента происходит в нормирующем множителе N , который удобно отнести к коэффициенту усиления линейной части.

В качестве примера рассмотрим процедуру получения шаблонов для двухпозиционного реле с гистерезисом, представленного на рис. 3.3, а. Коэффициент усиления гармонически линеаризованного реле преобразуем к нормированному виду:

$$q(A) = \frac{4c}{\pi A} = Nq_0\left(\frac{d}{A}\right),$$

где $N = \frac{c}{d}$, а $q_0\left(\frac{d}{A}\right) = \frac{4d}{\pi A}$.

Выражение для фазового сдвига $\mu(A)$ соответствует требуемой форме

$$\mu(A) = \mu_0\left(\frac{d}{A}\right) = -\operatorname{arctg} \frac{d}{A\sqrt{1 - \frac{d^2}{A^2}}}.$$

Шаблон представляет собой совмещенные графики функций $20\lg\frac{1}{q_0\left(\frac{d}{A}\right)}$ и $\left(-\pi - \mu_0\left(\frac{d}{A}\right)\right)$, построенные для относительного аргумента $\frac{d}{A}$ в обратном логарифмическом масштабе. Его вид для данного примера показан на рис. 4.3.

Отметим, что при использовании этого метода для решения уравнения Гольдфарба должны быть одинаковыми масштабы амплитудных и фазовых характеристик шаблона и ЛАФЧХ, тогда как масштаб по горизонтали шаблона может быть произвольным.

Предположим, что в структурной схеме на рис. 4.1 нелинейным элементом является двухпозиционное реле с гистерезисом, а пере-

даточная функция линейной части имеет вид $W(s) = \frac{K}{(Ts+1)^2}$. Ис-

пользуем полученный шаблон для отыскания параметров лебаний, размещая его на ЛАФЧХ линейной части так, чтобы совпадали значения 0 дБ и 0° фазы шаблона с 0 дБ и 0° фазы частотных характеристик.

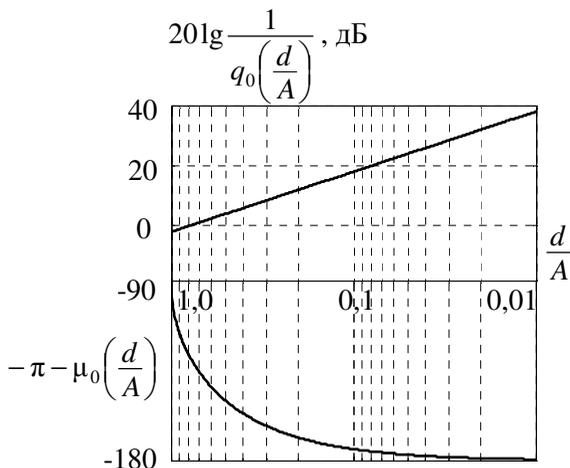


Рис. 4.3

На рис. 4.4 показано найденное правильное положение шаблона, полученное при его горизонтальном перемещении относительно оси частот до тех пор, пока не произойдут пересечения ЛАХ $L(\omega)$

с кривой $20 \lg \frac{1}{q_0} \left(\frac{d}{A} \right)$ шаблона и фазы $\theta(\omega)$ с кривой $-\pi - \mu_0 \left(\frac{d}{A} \right)$

на одной частоте (т.е. точки пересечения кривых должны лежать на одной вертикали).

Эта частота и будет являться частотой автоколебаний ω_a , а значение амплитуды автоколебаний A_a находим через относительную величину $\frac{d}{A}$ шаблона в точке пересечения с вертикалью. Как вид-

но из рисунка, нормирующий множитель нелинейного элемента повлиял на коэффициент усиления линейной части.

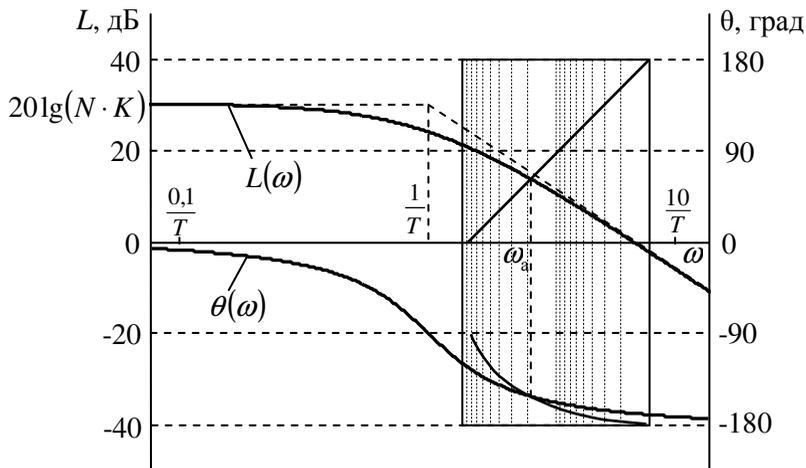


Рис. 4.4

Несмотря на то, что метод применения шаблонов для отыскания амплитуды и частоты автоколебаний известен давно и не был ориентирован на использование вычислительной техники, он также с успехом может быть реализован в среде *Matlab* с привлечением программы *bode(w)* из пакета *Control system toolbox*.

4.4. Построение областей устойчивости нелинейной системы

Метод гармонического баланса благодаря найденным устойчивым и неустойчивым периодическим решениям позволяет приближенно построить области устойчивости нелинейной системы. Граница области устойчивости будет определяться значениями амплитуд автоколебаний в зависимости от какого-либо параметра, в качестве которого чаще всего используется коэффициент усиления линейной части системы.

Графики зависимости амплитуды автоколебаний от коэффициента усиления несут в себе больше информации, чем это могло бы показаться на первый взгляд, поскольку с их помощью оказывается возможным определить связь поведения системы с величиной входного сигнала. При исследовании устойчивости нелинейной системы в качестве тестового входного сигнала будем использо-

вать импульсное воздействие с варьируемыми уровнем u и длительностью τ .

Рассмотрим примеры построения областей устойчивости нелинейной системы с передаточной функцией линейной части $W(s) = \frac{K}{(Ts+1)^3}$ и различными типами нелинейных статических характеристик.

Для первого примера возьмем нелинейность типа “зона насыщения” (см. рис. 3.1, *a*). На рис. 4.5, *a* представлены годографы линейной части $W(j\omega)$ и $-\frac{1}{J(A)}$ нелинейного элемента, которые

будут пересекаться при выполнении условия $K \cdot H(\omega_\pi) \geq \frac{d}{c}$, где $H(\omega_\pi)$ здесь и в дальнейшем есть модуль передаточной функции при $K=1$.

Полученная точка пересечения годографов дает устойчивый автоколебательный процесс на частоте ω_π с амплитудой A_a , поскольку при положительном приращении ΔA в точке пересечения годографов имеем выход из-под охвата годографом $W(j\omega)$ смещенной точки $-\frac{1}{J(A_a + \Delta A)}$.

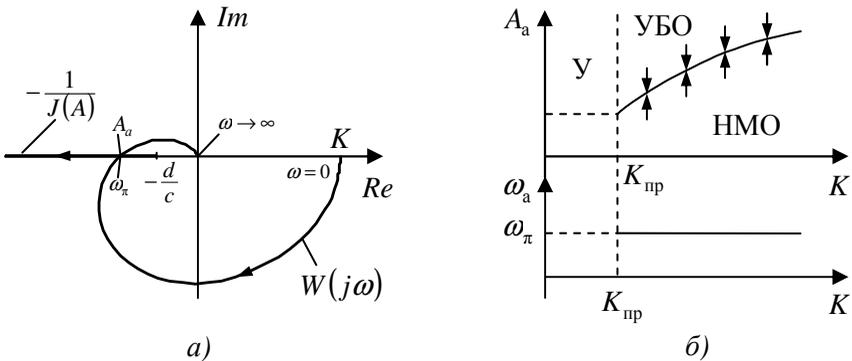


Рис. 4.5

На рис. 4.5, *б* показаны графики зависимости амплитуды и частоты автоколебаний от коэффициента усиления линейной части,

которые позволяют определить области устойчивости. При значениях коэффициента усиления K меньше предельного, определяемого как $K_{\text{пр}} = \frac{d}{cH(\omega_{\pi})}$, система оказывается асимптотически устойчивой независимо от величины импульсного входного воздействия. Эта область отмечена на рисунке буквой У.

С ростом коэффициента усиления при $K > K_{\text{пр}}$ увеличивается и амплитуда автоколебаний, так как точка пересечения смещается влево в область больших значений амплитуд вдоль годографа $-\frac{1}{J(A)}$, а частота автоколебаний остается постоянной $\omega_a = \omega_{\pi}$ из-за того, что фазовая характеристика линейной части системы $\theta(\omega)$ не зависит от K . Область ниже кривой на графике $A_a = f(K)$ характеризуется как неустойчивая при малых отклонениях от положения равновесия (НМО), а область выше кривой – как устойчивая при больших отклонениях (УБО). Таким образом, получаем жесткий режим возникновения автоколебаний независимо от величины возмущающего воздействия.

Эти выводы подтверждаются переходными процессами в нелинейной системе с выбранным значением $K > K_{\text{пр}}$ при подаче на вход импульсов различной величины. На рис. 4.6, а показан процесс нарастания амплитуды колебаний на выходе системы до значения A_a , возникших из-за импульсного входного воздействия малой величины $u < A_a$, тогда как на рис. 4.6, б наблюдаем спад амплитуды колебаний до значения A_a при подаче импульсного входного воздействия большой величины $u > A_a$.

Как только коэффициент усиления K становится меньше $K_{\text{пр}}$, возникшие колебания в обоих случаях будут затухающими, сходящимися к нулю.

В качестве второго примера рассмотрим систему с нелинейностью типа “зона нечувствительности” (см. Приложение). Параметрами этой нелинейности являются ширина зоны нечувствительности $\pm d$ и коэффициент усиления на линейном участке K_n .

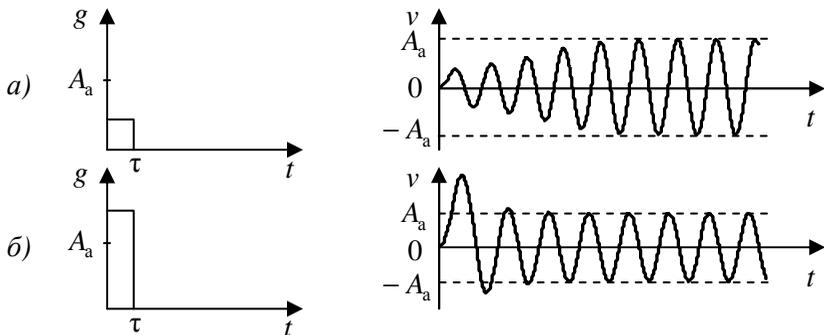


Рис. 4.6

Годографы передаточной функции линейной части системы и нелинейного элемента представлены на рис. 4.7, а. При малых значениях коэффициента усиления линейной части $0 < K < K_{\text{пр}}$ пересечения годографов отсутствуют, и система оказывается асимптотически устойчивой с точностью до зоны нечувствительности d при любых входных воздействиях.

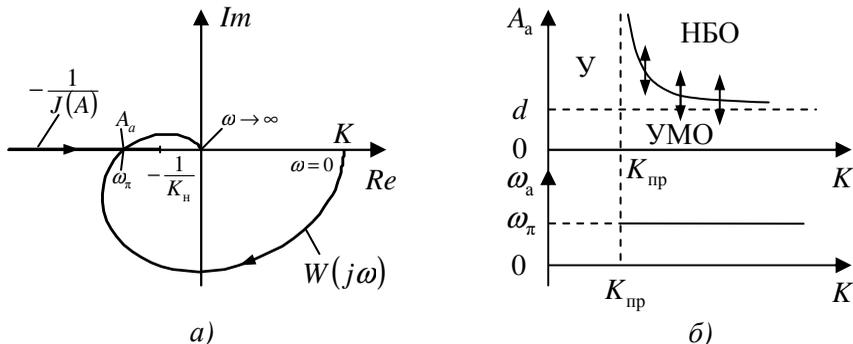


Рис. 4.7

Предельное значение коэффициента усиления находим по точке касания годографов $K_{\text{пр}} = \frac{1}{H(\omega_\pi) \cdot K_n}$. При $K > K_{\text{пр}}$ возникающие периодические решения оказываются неустойчивыми, так как положительное приращение амплитуды ΔA в точке пересечения годографов смещает точку $-\frac{1}{J(A_a + \Delta A)}$ внутрь годографа $W(j\omega)$.

С ростом коэффициента усиления амплитуда неустойчивых автоколебаний уменьшается, а частота остается постоянной, что и показано на рис. 4.7, б.

Как видим из этого рисунка, к области абсолютной устойчивости $У$ для $0 < K < K_{пр}$ добавляется область устойчивости при малых отклонениях УМО для $K > K_{пр}$, лежащая ниже кривой $A_a = f(K)$. Область, расположенная выше кривой, соответствует неустойчивым процессам при больших отклонениях от положения равновесия НБО. Реакции системы на импульсные входные воздействия, представленные на рис. 4.8, подтверждают сделанные выводы.

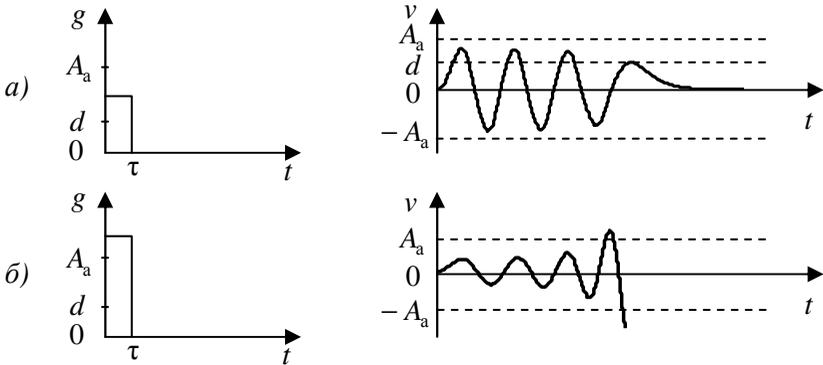


Рис. 4.8

Для импульса малой величины $u < A_a$ возникающие колебания затухают, стремясь к зоне нечувствительности (рис. 4.8, а). При подаче на вход системы импульса большой величины $u > A_a$ колебательный процесс становится неустойчивым (рис. 4.8, б).

В третьем примере используем нелинейность типа “идеализированное трехпозиционное реле” (см. Приложение), параметрами которого являются уровни включения $\pm c$ и значения входных сигналов, когда происходит включение $\pm d$.

Годографы передаточной функции линейной части и нелинейного элемента представлены на рис. 4.9, а. Годограф нелинейного элемента $-\frac{1}{J(A)}$ при значениях $d \leq A \leq \sqrt{2}d$ проходит по отрица-

тельной части действительной оси из $-\infty$ до точки $-\frac{\pi d}{2c}$, а для $\sqrt{2}d < A < \infty$ поворачивает обратно и движется по отрицательной части действительной оси до $-\infty$.

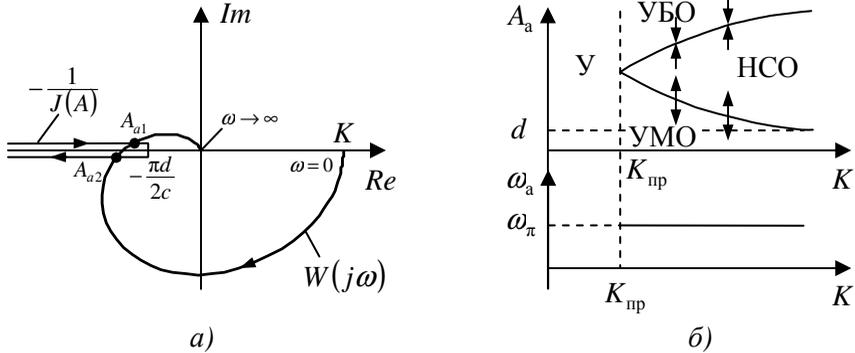


Рис. 4.9

В отличие от предыдущих примеров при $K > K_{пр}$ в точке пересечения годографов имеем два решения на одной частоте $\omega_a = \omega_\pi$. Предельное значение коэффициента усиления определяем в точке касания годографов $K_{пр} = \frac{\pi d}{2cH(\omega_\pi)}$. Первое решение (A_{a1}, ω_π) будет неустойчивым, так как получаем смещение точки $-\frac{1}{J(A_{a1} + \Delta A)}$ внутрь годографа $W(j\omega)$, а второе решение (A_{a2}, ω_π) оказывается устойчивым, так как точка $-\frac{1}{J(A_{a2} + \Delta A)}$ не охватывается годографом $W(j\omega)$. Изменяя коэффициент усиления в диапазоне $K_{пр} < K < \infty$, получим неустойчивую убывающую до значения d ветвь графика $A_a = f(K)$ и устойчивую возрастающую ветвь, которые позволяют выделить области устойчивости.

Как и в предыдущих примерах, область для $0 < K < K_{пр}$ является абсолютно устойчивой независимо от входного воздействия. При значениях $K > K_{пр}$ область ниже неустойчивой ветви графика

$A_a = f(K)$ является устойчивой при малых отклонениях (УМО), а область выше устойчивой ветви графика $A_a = f(K)$ будет устойчивой при больших отклонениях (УБО). Тогда область между этими двумя ветвями становится неустойчивой при средних отклонениях (НСО).

Реакции системы на импульсные входные воздействия, соответствующие выделенным областям, представлены на рис. 4.10 а, б, в.

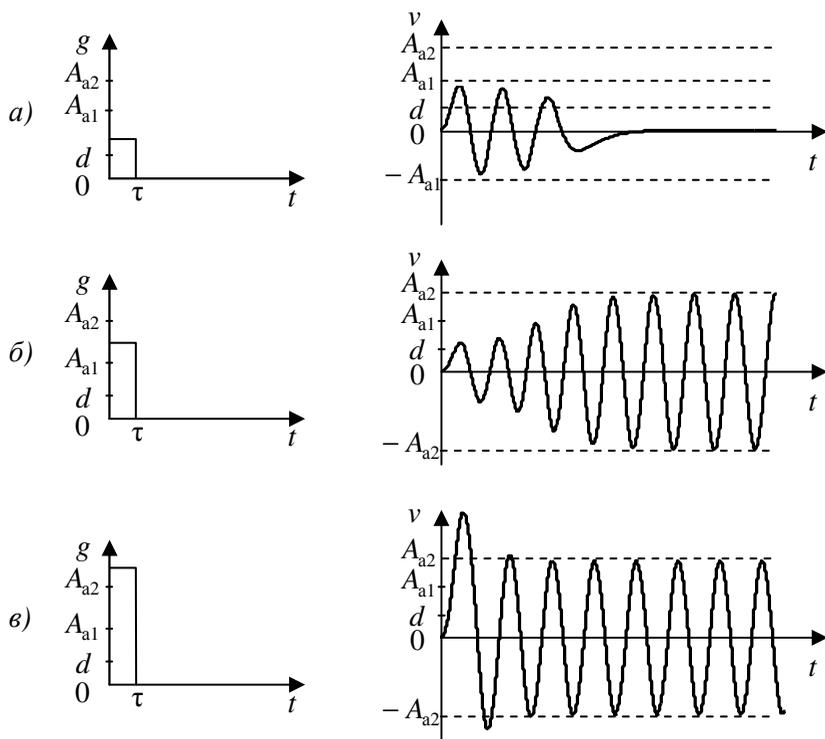


Рис. 4.10

Процесс на рис. 4.10, а характеризует область УМО, когда при малой величине импульса $d < u < A_{a1}$ получаем затухающие колебания на выходе системы.

На рис. 4.10, б представлен процесс увеличения амплитуды колебаний на выходе системы до значения A_{a2} при подаче импульса средней величины $A_{a1} < u < A_{a2}$, что соответствует области НСО.

Как показано на рис. 4.10, в, подавая на вход системы импульс большой величины $u > A_{a2}$, получаем колебательный процесс с уменьшающейся амплитудой до значения амплитуды устойчивых автоколебаний A_{a2} , соответствующий области УБО.

В отличие от жесткого режима возникновения автоколебаний в первом примере, когда реально они возникают без нашего участия, в данном случае имеем мягкий режим установления автоколебаний, требующий подачи определенного по величине входного сигнала.

Отметим, что во всех рассмотренных в этом разделе примерах частота автоколебаний оставалась постоянной, не зависящей от коэффициента усиления K , что характерно лишь для однозначных нелинейностей. Если нелинейности имеют неоднозначные статические характеристики, то возникает зависимость частоты автоколебаний от K , и более того, могут существовать устойчивая и неустойчивая ветви графика $\omega_a = \varphi(K)$. В качестве такого примера можно исследовать систему, годографы которой представлены на рис. 4.2, но это оставим для самостоятельной работы.

4.5. Методика проведения экспериментов

Поскольку в работе предстоит оценить точность полученных теоретических границ областей устойчивости, воспользуемся моделированием нелинейной системы в среде *Simulink*. При экспериментальном определении точек, лежащих на устойчивой ветви графиков $A_a = f(K)$ и $\omega_a = \varphi(K)$, проблемы не возникают, тогда как для выявления неустойчивой ветви этих графиков приходится действовать с особой аккуратностью, приближаясь к ней с двух сторон. В результате применения такой методики должны получиться более точные границы областей устойчивости, которые позволят определить погрешности, возникающие при использовании приближенного метода гармонического баланса.

Схема для экспериментального исследования нелинейной системы представлена на рис. 4.11.

С помощью генераторов единичного ступенчатого сигнала, сумматора и усилительного блока формируем импульсное входное воздействие $g(t) = u \cdot (1(t) - 1(t - \tau))$. Длительность импульса τ оп-

ределяется момент срабатывания отрицательного ступенчатого сигнала, а требуемая величина импульса u устанавливается в блоке усиления. Величина τ также имеет важное значение, и выбирать ее нужно исходя из динамических свойств системы так, чтобы при импульсном воздействии отклонение от положения равновесия системы достигало нужной области.

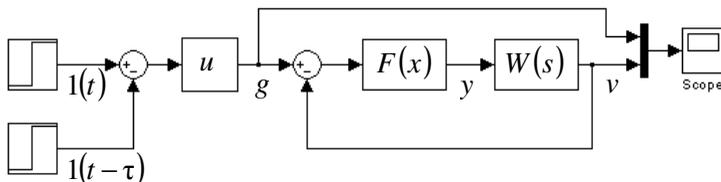


Рис. 4.11

Нелинейная система в схеме проведения экспериментов представлена в стандартном виде, как и на рис. 4.1, а сам эксперимент будет заключаться в наблюдении и регистрации реакций системы на различные импульсные входные воздействия.

Общее количество вариантов нелинейных систем, которые могут быть предложены для исследования в этой лабораторной работе, определяется табл. 4.1, где строки соответствуют различным передаточным функциям линейной части, а номера столбцов – нелинейным статическим характеристикам в приложении.

Таблица 4.1

№	$F(x)$								
	$W(s)$	1	2	3	4	5	6	7	8
1	$\frac{K(1-Ts)}{s(Ts+1)}$								
2	$\frac{K}{(Ts+1)^2}$								
3	$\frac{K}{(Ts+1)^3}$								

4.6. Задание и порядок выполнения работы

В работе должно быть представлено исследование не менее трех вариантов нелинейных систем, заданных преподавателем в соответствии с приведенной таблицей. Для каждого варианта необхо-

димо выполнить следующие пункты задания, содержащего расчетную и экспериментальную часть.

1. Составить программу отыскания решения уравнения Гольдфарба в среде *Matlab*.

2. Определить предельное значение коэффициента усиления линейной части системы. Для однозначных нелинейностей он рассчитывается легко по формулам, приведенным в описании лабораторной работы, а для неоднозначных нелинейных характеристик рекомендуется использовать полученную программу.

3. Задавая различные значения коэффициента усиления линейной части системы, по найденным решениям построить графики зависимости $A_a = f(K)$ и $\omega_a = \varphi(K)$. Выделить области устойчивых и неустойчивых состояний.

4. Собрать схему проведения экспериментов с нелинейной системой в среде *Simulink* (см. рис. 4.11).

5. Установить в генераторе ступеньки $1(t - \tau)$ длительность импульса, обеспечивающую отклонение системы от положения равновесия в требуемую область.

6. Экспериментальным путем найти предельное значение коэффициента усиления линейной части системы. Таким значением будет являться его максимальная величина, меньше которой получаем затухающие процессы для любых входных импульсов.

7. Для нескольких значений коэффициента усиления из области $K > K_{пр}$ получить процессы, сходящиеся к устойчивым автоколебаниям с двух сторон, и определить параметры автоколебаний (A_a, ω_a) . В том случае, если имеется неустойчивая ветвь графика $A_a = f(K)$, то за значение A_a при заданном K принимаем предельную величину входного импульса u , больше которой процесс в системе начинает возрастать, а меньше которой убывает.

8. По найденным в п.7 точкам графика $A_a = f(K)$ построить экспериментальную область устойчивости системы совместно с теоретической. Сравнить полученные области устойчивости и сделать выводы.

Вопросы для подготовки к работе

1. В чем заключается суть метода гармонического баланса?

2. Какие допущения лежат в основе метода гармонического баланса?
3. Какой вид имеет уравнение Гольдфарба?
4. Какие способы решения уравнения Гольдфарба предлагаются в данной работе?
5. Дайте определение автоколебательного процесса.
6. Сформулируйте условия баланса амплитуд и баланса фаз.
7. В чем заключается особенность применения критерия Найквиста к гармонически линеаризованной нелинейной системе?
8. Сформулируйте критерий устойчивости автоколебаний.
9. Что означает отсутствие решений уравнения Гольдфарба?
10. Каким образом с помощью метода гармонического баланса получаем области устойчивости нелинейной системы?
11. Дайте понятие жесткого и мягкого режима возникновения автоколебаний.
12. В чем заключается методика экспериментальной проверки теоретических границ области устойчивости нелинейной системы?

Лабораторная работа № 5

ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА ГАРМОНИЧЕСКОГО БАЛАНСА К АНАЛИЗУ УСТОЙЧИВОСТИ НЕЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ С НЕУСТОЙЧИВЫМИ ОБЪЕКТАМИ

Цель работы – оценить погрешность при построении областей устойчивости нелинейной системы с неустойчивым объектом с помощью метода гармонического баланса.

5.1. Критерий устойчивости автоколебаний в нелинейной системе с неустойчивой линейной частью

Как уже было показано в лабораторной работе № 4, выводы об устойчивости решения уравнения Гольдфарба и соответствующего автоколебательного процесса можно сделать на основании трансформированного критерия Найквиста, примененного к гармонически линеаризованной нелинейной системе.

Поскольку в данной работе рассматриваются неустойчивые объекты, входящие в линейную часть системы, то при пересечении годографов $W(j\omega)$ и $-\frac{1}{J(A)}$ устойчивый автоколебательный процесс дает та точка пересечения, для которой положительное приращение ΔA приводит к смещению вдоль кривой $-\frac{1}{J(A)}$ в область, охватываемую годографом $W(j\omega)$ в положительном направлении $\frac{m_\delta}{2}$ раз при изменении частоты $0 < \omega < \infty$, где m_δ – количество полюсов передаточной функции $W(s)$ в правой полуплоскости.

Рассмотрим пример применения этого критерия к системе с неустойчивой линейной частью $W(s) = \frac{K(Ts + 1)}{s(Ts - 1)}$ и нелинейным элементом в виде двухпозиционного реле с гистерезисом (№ 6 Приложения). На рис. 5.1 представлены годографы линейной части $W(j\omega)$ и $-\frac{1}{J(A)}$ нелинейного элемента.

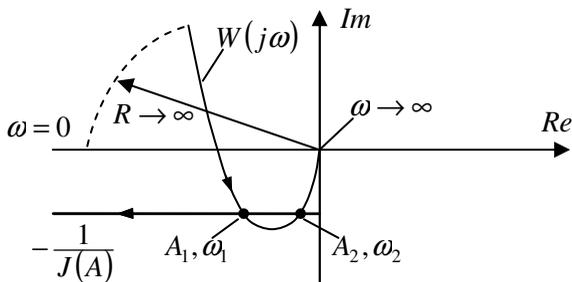


Рис. 5.1

При значении коэффициента усиления $K > K_{\text{пр}}$ имеем два решения уравнения Гольдфарба (A_1, ω_1) и (A_2, ω_2) , где $A_1 > A_2$, а $\omega_1 < \omega_2$. Предельное значение коэффициента усиления $K_{\text{пр}}$ определяется по точке касания годографов.

Воспользуемся приведенным критерием для определения устойчивости полученных решений. Даем положительное приращение ΔA в точке A_1 и получаем выход из-под охвата годографом $W(j\omega)$ точки $-\frac{1}{J(A_1 + \Delta A)}$, а по критерию Найквиста это означает неустойчивость, из-за чего амплитуда продолжает возрастать от точки решения (A_1, ω_1) .

При отрицательном приращении в точке A_1 получаем смещение вдоль годографа $-\frac{1}{J(A_1 - \Delta A)}$ внутрь годографа $W(j\omega)$, который охватывает смещенную точку, совершая половину оборота в положительном направлении, что означает устойчивость системы и дальнейшее уменьшение амплитуды колебаний. Таким образом, в точке (A_1, ω_1) имеем неустойчивое решение.

Аналогично, придавая малые приращения ΔA в обе стороны относительно точки A_2 , получим, что решение (A_2, ω_2) будет устойчивым и, следовательно, в системе возможны автоколебания с такими параметрами. Если же $K < K_{\text{пр}}$, то пересечения годографов отсутствуют и нелинейная система оказывается неустойчивой.

5.2. Построение областей устойчивости нелинейной системы с неустойчивыми объектами

В качестве первого примера рассмотрим систему с линейной частью $W(s) = \frac{K(Ts+1)}{s(Ts-1)}$ и нелинейным элементом “зона насыщения” (№ 1 Приложения). Их годографы представлены на рис. 5.2, а.

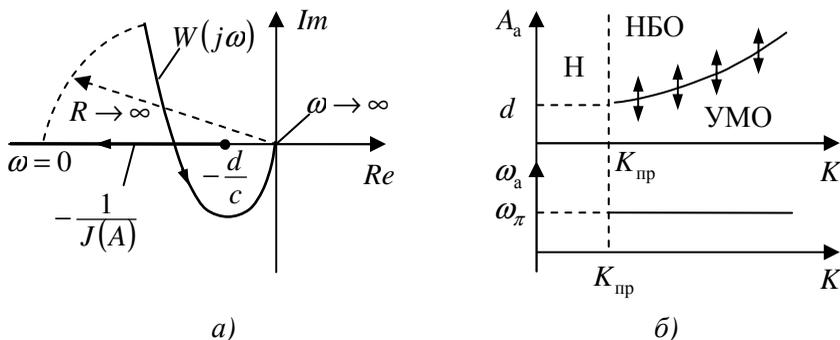


Рис. 5.2

При значениях коэффициента усиления $K < K_{пр}$, определяемого как $K_{пр} = \frac{d}{c \cdot H(\omega_\pi)}$, система является неустойчивой (Н), поскольку имеется решение на нулевой частоте и бесконечной амплитуде. Для значений $K > K_{пр}$ появляется второе решение, которое дает неустойчивый автоколебательный процесс, так как при положительном приращении ΔA в точке пересечения годографов имеем половину оборота годографа $W(j\omega)$ в отрицательном направлении относительно смещенной точки $-\frac{1}{J(A_a + \Delta A)}$. С дальнейшим ростом коэффициента усиления амплитуда неустойчивых автоколебаний увеличивается, а частота остается постоянной равной ω_π .

На рис. 5.2, б показаны графики зависимости параметров неустойчивых автоколебаний от коэффициента усиления, с помощью которых построена область устойчивости системы. Ниже кривой $A_a = f(K)$ получаем область устойчивости при малых отклонениях

от положения равновесия (УМО), а выше кривой – область неустойчивых состояний при больших отклонениях (НБО).

Реакции системы на импульсное входное воздействие различной величины при $K > K_{пр}$ представлены на рис. 5.3. Если величина импульса $u < A_a$, то возникший колебательный процесс является затухающим, сходящимся к нулю (рис. 5.3, а), а если $u > A_a$, то колебательный процесс становится расходящимся (рис. 5.3, б).

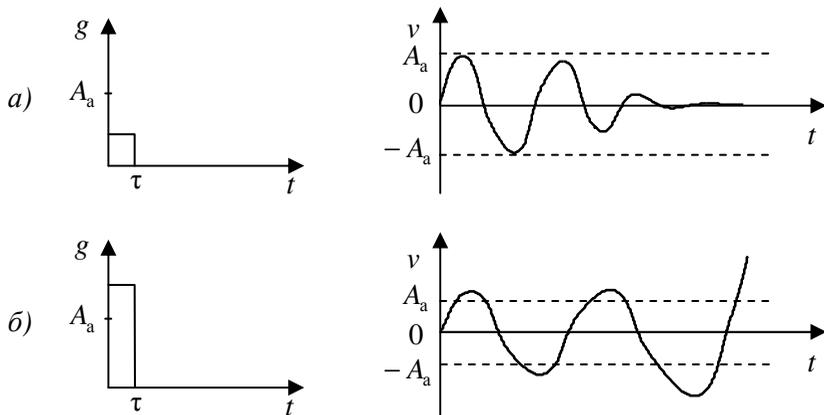


Рис. 5.3

При значениях $K < K_{пр}$ процессы в системе оказываются неустойчивыми независимо от величины входного воздействия.

Во втором примере рассмотрим систему с прежней линейной частью и нелинейным элементом “люфт” (№ 8 Приложения). Как показано на рис. 5.4, а, имеется точка пересечения годографов линейной части $W(j\omega)$ и нелинейного элемента $-\frac{1}{J(A)}$ при $K > K_{пр}$, которая дает устойчивое решение, поскольку при положительном приращении ΔA в точке пересечения годографов происходит смещение вдоль кривой $-\frac{1}{J(A_a + \Delta A)}$ в область, охватываемую годографом $W(j\omega)$ в положительном направлении $\frac{1}{2}$ раза. Предельное значение коэффициента усиления находим из условия касания

годографов $K_{пр} = \frac{1}{K_n \cdot H(\omega_\pi)}$, где K_n – тангенс угла наклона нелинейной характеристики “люфт”.

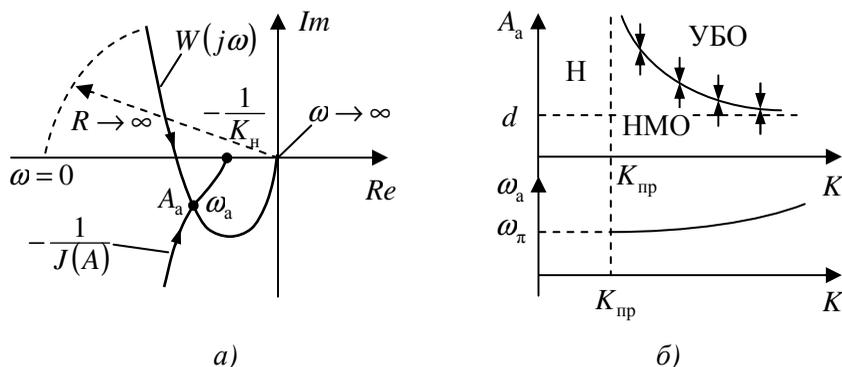


Рис. 5.4

С ростом коэффициента усиления амплитуда устойчивых автоколебаний уменьшается, а частота возрастает. На рис. 5.4, б, где представлены эти графики, можем выделить область устойчивости при больших отклонениях (УБО), расположенную выше кривой $A_a = f(K)$, и область неустойчивости при малых отклонениях (НМО), лежащую ниже этой кривой. Для значений $K < K_{пр}$, как и в предыдущем примере, получаем область неустойчивости (Н) при любых входных воздействиях.

Процессы установления автоколебательного режима, когда $K > K_{пр}$, для различных по величине входных импульсов представлены на рис. 5.5. При малых входных воздействиях получаем движение в системе из области НМО к установившемуся режиму с возрастающей амплитудой колебаний (рис. 5.5, а), а при больших входных воздействиях имеем движение из области УБО к установившемуся режиму с уменьшающейся амплитудой колебаний (рис. 5.5, б).

Для третьего примера в системе используем неустойчивую линейную часть, имеющую два полюса в правой полуплоскости

$W(s) = \frac{K(Ts + 1)}{(Ts - 1)^2}$, и нелинейность типа “насыщение с зоной нечувствительности” (№ 3 Приложения). Годографы линейной части и нелинейного элемента представлены на рис. 5.6, а.

Годографы линейной части и нелинейного элемента представлены на рис. 5.6, а.

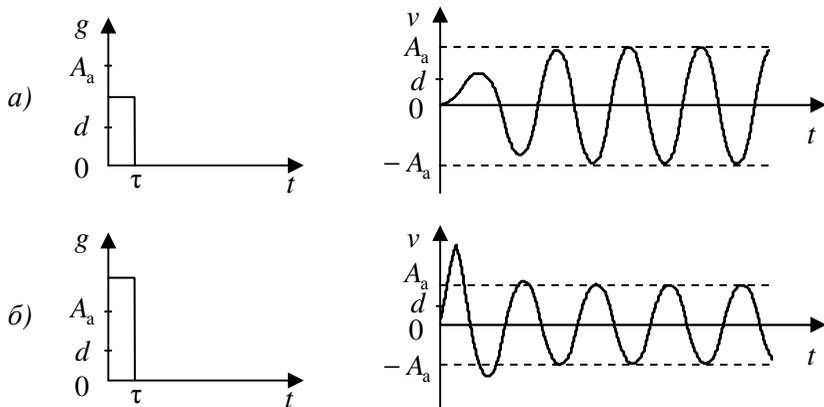


Рис. 5.5

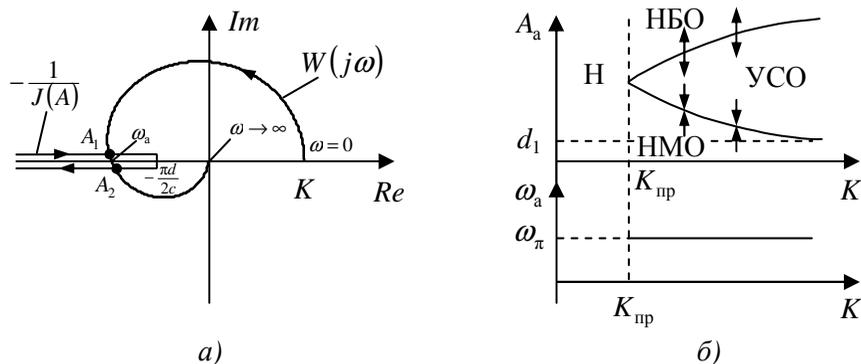


Рис. 5.6

Когда коэффициент усиления $K < K_{пр}$, пересечения годографов отсутствуют и система оказывается неустойчивой. Если $K > K_{пр}$, то получаем две точки пересечения годографов с амплитудами $A_1 < A_2$ на одной частоте ω_π . Первая точка (A_1, ω_π) дает устойчивое решение, так как положительное приращение ΔA смещает точ-

ку $-\frac{1}{J(A_1 + \Delta A)}$ в область, охватываемую годографом $W(j\omega)$ в положительном направлении один раз при изменении частоты $0 < \omega < \infty$. Вторая точка (A_2, ω_π) соответствует неустойчивому решению, поскольку при положительном приращении ΔA точка $-\frac{1}{J(A_2 + \Delta A)}$ не охватывается годографом $W(j\omega)$.

С ростом коэффициента усиления амплитуда устойчивых автоколебаний уменьшается до значения параметра зоны нечувствительности d , а амплитуда неустойчивых автоколебаний возрастает. Частота как устойчивых, так и неустойчивых автоколебаний остается постоянной $\omega_a = \omega_\pi$. Графики зависимости $A_a = f(K)$ и $\omega_a = \varphi(K)$, представленные на рис. 5.6, б, позволяют выделить область устойчивости при средних отклонениях (УСО), расположенную между двумя ветвями графика амплитуды автоколебаний. Область выше неустойчивой ветви этого графика является неустойчивой при больших отклонениях (НБО), а область ниже устойчивой ветви графика до значения d_1 становится неустойчивой при малых отклонениях (НМО).

Характер движения в системе, с $K > K_{\text{пр}}$, вызванного различными по величине импульсными входными воздействиями, показан на рис. 5.7.

Если величина входного импульса $d_1 < u < A_1$, то получаем процесс нарастания амплитуды колебаний из области НМО до установившегося значения автоколебаний A_1 (рис. 5.7, а). Если же $A_1 < u < A_2$, то имеем движение из области УСО с уменьшением амплитуды колебаний до значения A_1 установившихся автоколебаний (рис. 5.7, б). На рис. 5.7, в показан расходящийся процесс в системе, который возникает при подаче на вход импульса по величине $u > A_2$, что соответствует области НБО.

Отметим, что в отличие от предыдущей лабораторной работы, где использовались устойчивые объекты, во всех рассмотренных примерах в данной работе нелинейная система имеет области устойчивости только при $K > K_{\text{пр}}$. Анализируя приведенные приме-

ры, видим, что для получения режима устойчивых автоколебаний в системе с неустойчивыми объектами, когда это возможно, необходимо не только выполнение приведенного условия для коэффициента усиления, но и наличие импульсного входного воздействия определенной величины и длительности.

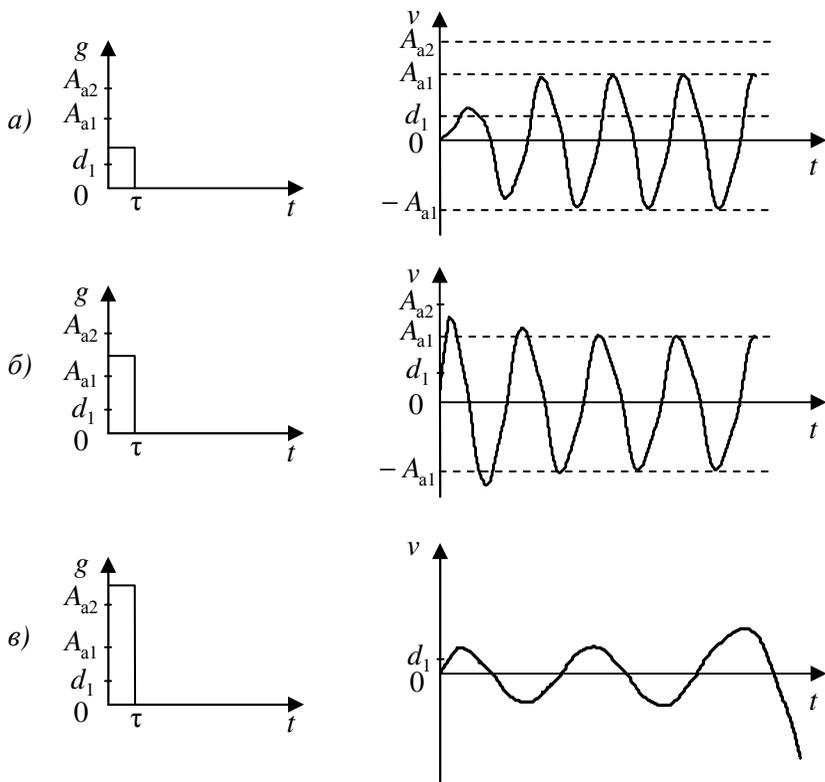


Рис. 5.7

5.3. Варианты заданий

В качестве неустойчивого объекта предлагается рассмотреть два случая, когда его передаточная функция помимо дифференцирующего звена первого порядка содержит интегратор с неустойчивым апериодическим звеном, и когда в ней находятся два неустойчивых апериодических звена. Выражения передаточных функций линейной части системы размещены по строкам табл. 5.1, а номера

столбцов соответствуют нелинейным статическим характеристикам в приложении.

Таблица 5.1

№	$W(s)$	$F(x)$								
		1	2	3	4	5	6	7	8	
1	$\frac{K(T_1s + 1)}{s(T_2s - 1)}$									
2	$\frac{K(T_1s + 1)}{(T_2s - 1)^2}$									

С помощью табл. 5.1 преподаватель задает варианты нелинейных систем, предлагаемых для исследования.

Методика проведения экспериментов аналогична приведенной в предыдущей лабораторной работе в соответствующем разделе, с той лишь разницей, что в структурную схему на рис. 4.11 необходимо помещать передаточную функцию линейной части с неустойчивыми звеньями из табл. 5.1.

5.4. Задание и порядок выполнения работы

В работе должно быть представлено исследование не менее трех вариантов нелинейных систем, заданных преподавателем в соответствии с табл. 5.1. Для каждого варианта необходимо выполнить следующие пункты задания, содержащего расчетную и экспериментальную часть.

1. Составить программу отыскания решения уравнения Гольдфарба в среде *MATLAB*.

2. Определить предельное значение коэффициента усиления линейной части системы. Для однозначных нелинейностей он рассчитывается по формулам, приведенным в описании лабораторной работы, а для неоднозначных нелинейных характеристик рекомендуется использовать полученную программу.

3. Задавая различные значения коэффициента усиления линейной части системы, по найденным решениям построить графики зависимости параметров автоколебаний $A_a = f(K)$ и $\omega_a = \varphi(K)$. Выделить области устойчивых и неустойчивых состояний.

4. Собрать схему проведения экспериментов над нелинейной системой в среде *Simulink* (см. рис. 4.11).

5. Установить в генераторе ступеньки $1(t - \tau)$ длительность импульса, обеспечивающую отклонение системы от положения равновесия в требуемую область.

6. Экспериментальным путем найти предельное значение коэффициента усиления линейной части системы. Таким значением будет являться его максимальная величина, меньше которой получаем расходящиеся процессы при любых входных импульсах, превышающих зону нечувствительности d .

7. Для нескольких значений коэффициента усиления из области $K > K_{\text{пр}}$ получить процессы, сходящиеся к устойчивым автоколебаниям с двух сторон и определить параметры автоколебаний (A_a, ω_a) . В том случае, если имеется неустойчивая ветвь графика $A_a = f(K)$, то за значение A_a при заданном K принимаем предельную величину входного импульса u , больше которой процесс в системе начинает возрастать, а меньше которой – убывает.

8. По найденным в п. 7 точкам графика $A_a = f(K)$ построить экспериментальную область устойчивости системы совместно с теоретической. Сравнить полученные области устойчивости и сделать выводы.

Вопросы для подготовки к работе

1. Как определяется предельное значение коэффициента усиления в системе с однозначной нелинейностью?

2. Как найти предельное значение коэффициента усиления в системе с двузначной нелинейной статической характеристикой?

3. Сформулируйте критерий устойчивости автоколебаний в нелинейной системе, содержащей неустойчивый объект с одним полюсом в правой полуплоскости.

4. Что изменяется в формулировке критерия устойчивости автоколебаний в нелинейной системе, если объект имеет два полюса в правой полуплоскости?

5. В каком случае частота автоколебаний зависит от коэффициента усиления линейной части системы?

Лабораторная работа № 6

ИССЛЕДОВАНИЕ РЕЛЕЙНЫХ СИСТЕМ НА ФАЗОВОЙ ПЛОСКОСТИ

Цель работы – научиться пользоваться методом фазовой плоскости как инструментом точного анализа движения нелинейных систем второго порядка.

Основы метода исследования систем на фазовой плоскости, касающиеся выбора системы координат, построения фазовых траекторий и фазовых портретов, определения направления движения вдоль фазовых траекторий, были рассмотрены в первом цикле лабораторных работ по курсу ТАУ [1] и здесь также будут использованы. Напомним лишь, что в качестве координат на фазовой плоскости возьмем по горизонтали выходной сигнал системы, обозначенный как x_1 , а по вертикали – скорость его изменения $\dot{x}_1 = x_2$.

В отличие от метода гармонического баланса исследование нелинейных систем на фазовой плоскости позволяет получить точные результаты. Так, например, если в нелинейной системе на фазовой плоскости выявлен предельный цикл сложной конфигурации, то применение метода гармонического баланса практически всегда дает положительный ответ о существовании автоколебательного режима, но при этом предельный цикл аппроксимируется эллипсом. По отклонению эллипса от замкнутой кривой предельного цикла можно оценивать погрешности метода гармонического баланса.

Несмотря на то, что метод фазовой плоскости является точным, он позволяет изучить только системы второго порядка, тогда как приближенный метод гармонического баланса не имеет ограничения на порядок системы.

6.1. Постановка задачи

В данной лабораторной работе рассмотрим нелинейные системы, структурная схема которых представлена на рис. 6.1.

С помощью нелинейного элемента F задаем различные статические характеристики реле, а $W_0(s)$ соответствует передаточной

функции первого порядка изменяемой части объекта. Коэффициент усиления a в обратной связи внутреннего контура является варьируемым параметром.

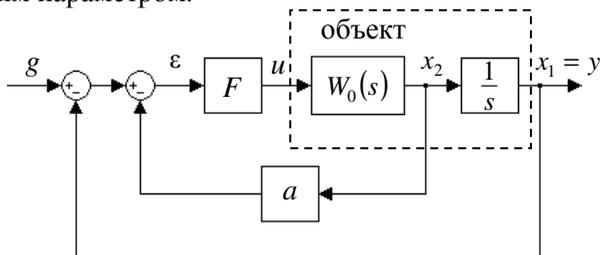


Рис. 6.1

Варианты исследуемых нелинейных систем получаем по табл. 6.1, где по вертикали расположены передаточные функции $W_0(s)$, а по горизонтали – номера релейных характеристик в приложении.

Таблица 6.1

$W_0(s)$ \ №	4	5	6	7
$\frac{K}{s}$				
$\frac{K}{Ts+1}$				
$\frac{K}{Ts-1}$				

Номера 4 и 5 соответствуют идеализированным однозначным двухпозиционному и трехпозиционному реле, а в нелинейностях с номерами 6 и 7 учитывается наличие в реле гистерезиса.

При изучении поведения нелинейных систем на фазовой плоскости необходимо получить виды фазовых траекторий для различных выражений $W_0(s)$ и трех возможных постоянных значений сигналов управления, поступающих с реле на вход объекта. В тех случаях, когда нелинейная статическая характеристика является кусочно-линейной и отделена от линейной части системы, резуль-

тирующую фазовую траекторию можно охарактеризовать как псевдолинейную, составленную из различных семейств фазовых характеристик, соответствующих линейным описаниям системы для определенных участков нелинейности.

6.2. Анализ объекта управления в первом варианте

Для этого варианта $W_0(s) = \frac{K}{s}$. Тогда передаточная функция объекта управления соответствует двум последовательно соединенным интеграторам

$$W(s) = \frac{y(s)}{u(s)} = \frac{K}{s^2},$$

а уравнения состояния имеют вид

$$\begin{aligned}\dot{x}_1(t) &= x_2(t), \\ \dot{x}_2(t) &= K \cdot u(t).\end{aligned}$$

Сигнал управления $u(t)$ принимает значения $+c$ или $-c$ для двухпозиционных реле, а в трехпозиционном реле к ним добавляется $u(t) = 0$.

Найдем решение уравнений состояния и фазовую траекторию в случае, когда $u(t) = c$.

Разделим второе уравнение на первое:

$$\frac{dx_2}{dx_1} = \frac{K \cdot c}{x_2(t)},$$

и в результате интегрирования получим семейство фазовых траекторий в виде парабол:

$$\frac{x_2^2(t)}{2} = Kcx_1(t) + C_0,$$

где константа интегрирования C_0 зависит от начальных условий:

$$C_0 = \frac{x_{20}^2}{2} - Kcx_{10}.$$

Решение уравнений состояния дает временные функции изменения координат

$$\begin{aligned}x_1(t) &= \frac{Kc}{2}t^2 + x_{20}t + x_{10}, \\ x_2(t) &= Kct + x_{20}.\end{aligned}$$

На рис. 6.2, *a* представлено семейство фазовых траекторий для положительного сигнала управления, а на рис. 6.2, *б* – соответствующие им временные функции изменения координат.

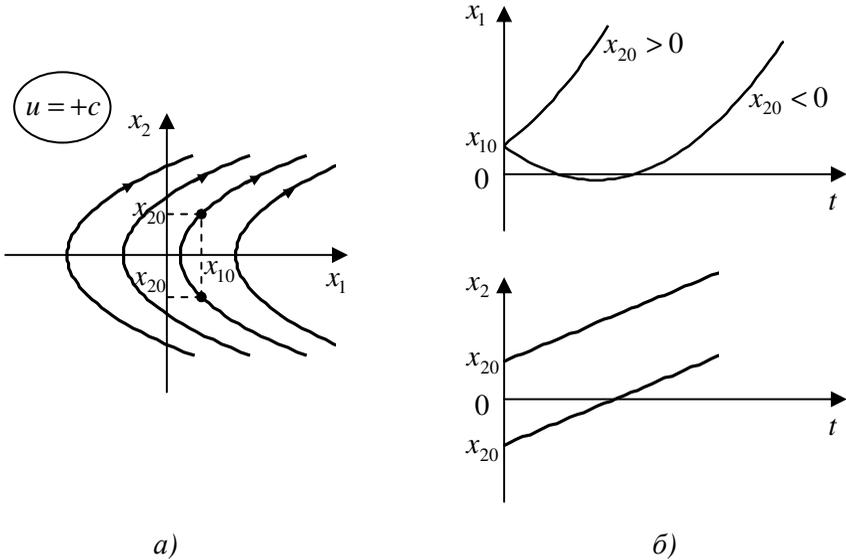


Рис. 6.2

Аналогично получим семейство фазовых траекторий для сигнала управления $u(t) = -c$:

$$\frac{x_2^2(t)}{2} = -Kcx_1(t) + C_0,$$

где константа интегрирования

$$C_0 = \frac{x_{20}^2}{2} + Kcx_{10}.$$

Временные функции изменения координат имеют вид

$$\begin{aligned} x_1(t) &= -\frac{Kc}{2}t^2 + x_{20}t + x_{10}, \\ x_2(t) &= -Kct + x_{20}. \end{aligned}$$

Семейство фазовых траекторий в случае отрицательного сигнала управления и графики изменения координат во времени представлены соответственно на рис. 6.3, *a* и *б*.

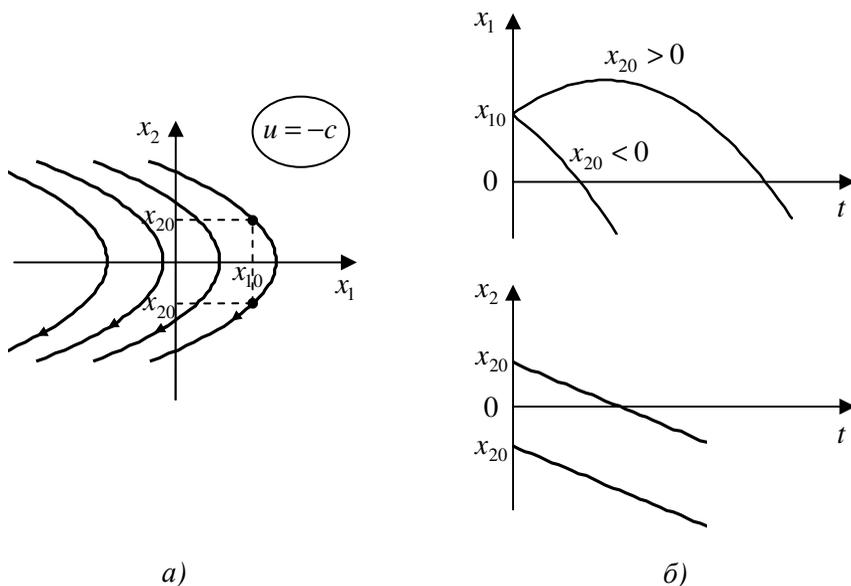


Рис. 6.3

Если входной управляющий сигнал $u(t)=0$, то уравнения состояния принимают вид

$$\begin{aligned}\dot{x}_1(t) &= x_2(t), \\ \dot{x}_2(t) &= 0.\end{aligned}$$

Тогда уравнение фазовой траектории не зависит от первой координаты

$$x_2(t) = x_{20},$$

а первая координата изменяется во времени по линейному закону

$$x_1(t) = x_{20} \cdot t + x_{10}.$$

Фазовые траектории и временные функции для нулевого управляющего сигнала показаны на рис. 6.4 *a*, *б*.

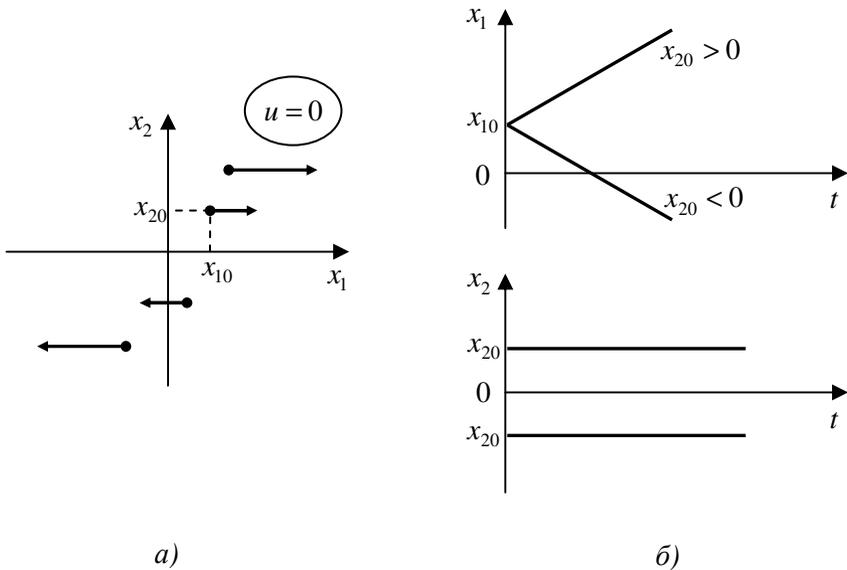


Рис. 6.4

6.3. Анализ объекта управления во втором варианте

Во втором варианте задания $W_0(s) = \frac{K}{Ts + 1}$. При этом передаточная функция объекта управления принимает вид

$$W(s) = \frac{y(s)}{u(s)} = \frac{K}{s(Ts + 1)},$$

которому во временной области соответствуют уравнения состояния

$$\begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= x_2(t), \\ \dot{x}_2(t) &= -\frac{1}{T}x_2(t) + \frac{K}{T}u(t). \end{aligned}$$

Пусть сигнал управления $u(t) = c$. В результате деления второго уравнения на первое получаем выражение

$$Tx_2(t) \frac{dx_2}{dx_1} = Kc - x_2(t),$$

в котором удастся разделить переменные при интегрировании

$$\int \frac{Tx_2(t)}{Kc - x_2(t)} dx_2 = \int dx_1 + C_0.$$

Вычисляя интегралы, находим уравнения фазовых траекторий для положительного управления

$$x_1(t) = -Tx_2(t) - KcT \ln \left| 1 - \frac{x_2(t)}{Kc} \right| + C_0,$$

где константа интегрирования

$$C_0 = x_{10} + Tx_{20} + KcT \ln \left| 1 - \frac{x_{20}}{Kc} \right|.$$

Найдем решение уравнений состояния во временной области с помощью переходной матрицы $\Phi(t,0)$, которое в векторно-матричной форме имеет вид

$$X(t) = \Phi(t,0)X(0) + \int_0^t \Phi(t,\tau)B \cdot U(\tau)d\tau,$$

где вектор состояния $X(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}$ и $X(0) = \begin{bmatrix} x_{10} \\ x_{20} \end{bmatrix}$, а переходная матрица является экспоненциальной функцией от матрицы A

$$\Phi(t,0) = e^{At} = \begin{bmatrix} \varphi_{11}(t) & \varphi_{12}(t) \\ \varphi_{21}(t) & \varphi_{22}(t) \end{bmatrix}.$$

В рассматриваемом примере матрицу A объекта и матрицу управления B , которая в случае скалярного входа $u(t)$ представляет собой столбец, составляем по уравнениям состояния

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -\frac{1}{T} \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ K \\ T \end{bmatrix}.$$

Поскольку понятие переходной матрицы связано со свободным движением, определим ее элементы $\varphi_{ij}(t)$ с помощью структурной схемы объекта на рис. 6.5 при отсутствии входного воздействия.

Элемент переходной матрицы $\varphi_{ij}(t)$ есть функция времени, описывающая переходный процесс, наблюдаемый на i -й координате вектора состояния при задании единичного начального условия на

j -ю координату вектора состояния и нулевых начальных условиях на остальных координатах.

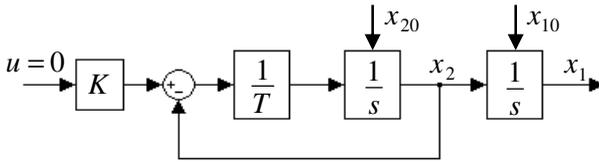


Рис. 6.5

Действуя по этому алгоритму, получаем элементы переходной матрицы

$$\varphi_{11}(t) = 1, \quad \varphi_{12}(t) = T \left(1 - e^{-\frac{t}{T}} \right),$$

$$\varphi_{21}(t) = 0, \quad \varphi_{22}(t) = e^{-\frac{t}{T}}.$$

Проверка правильности полученного результата заключается в том, что все элементы на главной диагонали переходной матрицы должны быть равны единице в момент времени $t = 0$, а остальные – в этот момент обратиться в нуль.

Таким образом, интересующие нас временные функции изменения координат вектора состояния при произвольных начальных условиях и любом входном воздействии можем получить из векторно-матричного решения

$$\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & T \left(1 - e^{-\frac{t}{T}} \right) \\ 0 & e^{-\frac{t}{T}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{10} \\ x_{20} \end{bmatrix} + \int_0^t \begin{bmatrix} 1 & T \left(1 - e^{-\frac{t-\tau}{T}} \right) \\ 0 & e^{-\frac{t-\tau}{T}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{K}{T} \end{bmatrix} u(\tau) d\tau.$$

Например, для $u(t) = c$ временные функции принимают вид

$$x_1(t) = Kc \left[t - T \left(1 - e^{-\frac{t}{T}} \right) \right] + T \left(1 - e^{-\frac{t}{T}} \right) x_{20} + x_{10},$$

$$x_2(t) = Kc \left(1 - e^{-\frac{t}{T}} \right) + e^{-\frac{t}{T}} x_{20}.$$

Семейство фазовых траекторий и соответствующие графики изменения координат во времени показаны на рис. 6.6, а, б.

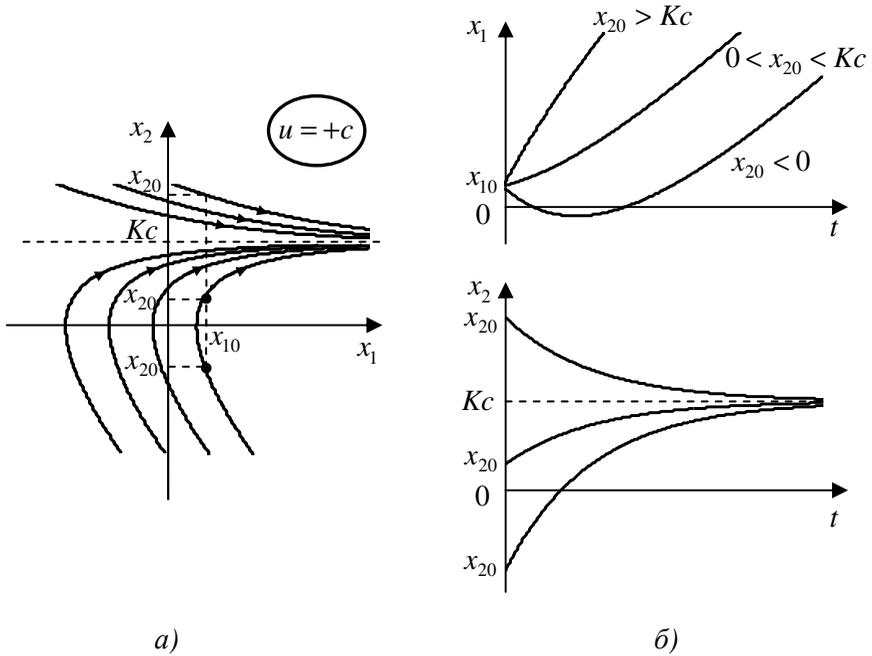


Рис. 6.6

Если $u(t) = -c$, то уравнение фазовых траекторий принимает вид

$$x_1(t) = -Tx_2(t) + KcT \ln \left| 1 + \frac{x_2(t)}{Kc} \right| + C_0,$$

где константа интегрирования

$$C_0 = x_{10} + Tx_{20} - KcT \ln \left| 1 + \frac{x_{20}}{Kc} \right|.$$

Используя найденное векторно-матричное решение, получаем временные функции координат для отрицательного сигнала управления

$$x_1(t) = Kc \left[T \left(1 - e^{-\frac{t}{T}} \right) - t \right] + T \left(1 - e^{-\frac{t}{T}} \right) x_{20} + x_{10},$$

$$x_2(t) = Kc \left(e^{-\frac{t}{T}} - 1 \right) + e^{-\frac{t}{T}} x_{20}.$$

На рис. 6.7, а, б изображены семейство фазовых траекторий и графики изменения фазовых координат во времени.

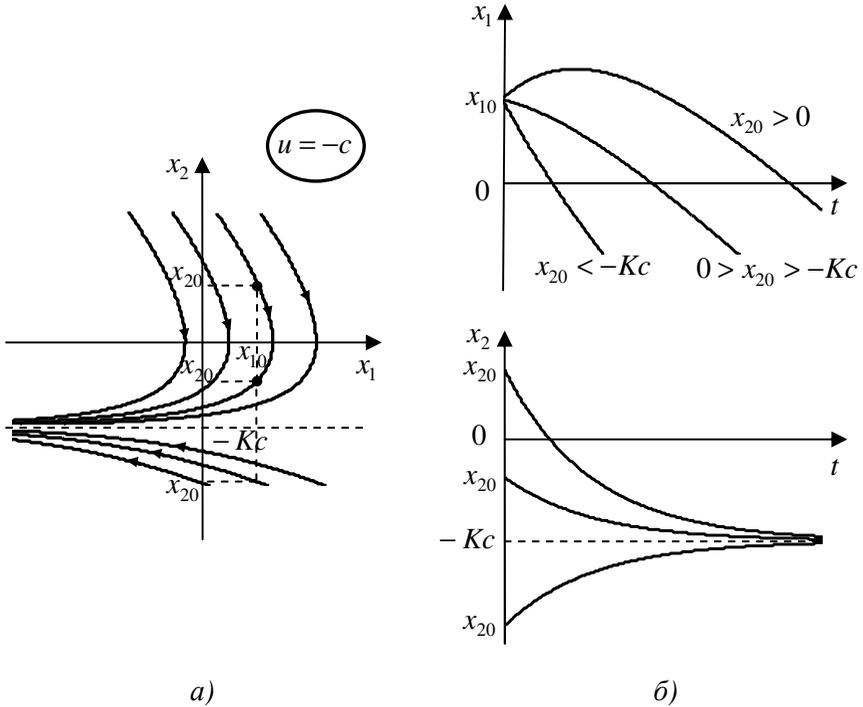


Рис. 6.7

В том случае, если сигнал управления с реле $u(t) = 0$, то получаем свободное устойчивое движение на фазовой плоскости в соответствии с уравнениями прямых линий

$$x_1(t) = -Tx_2(t) + C_0,$$

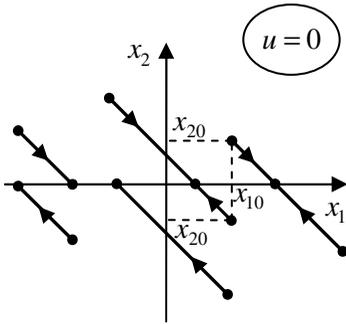
где константа $C_0 = x_{10} + Tx_{20}$.

Изменение координат во временной области также легко определяется с помощью векторно-матричного решения, в котором нужно отбросить интегральную составляющую:

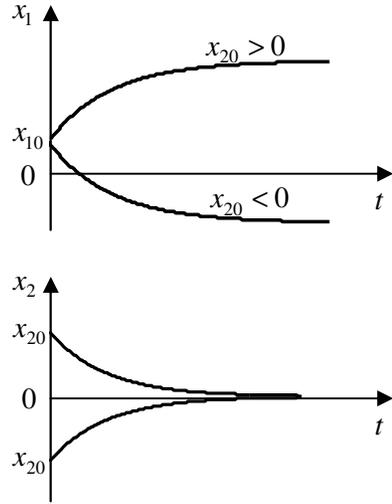
$$x_1(t) = T \left(1 - e^{-\frac{t}{T}} \right) x_{20} + x_{10},$$

$$x_2(t) = e^{-\frac{t}{T}} x_{20}.$$

Семейство фазовых траекторий и временные графики представлены на рис. 6.8, а, б.



а)



б)

Рис. 6.8

На фазовой плоскости движение прекращается, когда координата x_2 становится равной нулю.

6.4. Анализ объекта управления в третьем варианте

Здесь в изменяемой части объекта используется неустойчивое апериодическое звено $W_0(s) = \frac{K}{Ts - 1}$. В таком случае передаточная функция объекта имеет вид

$$W(s) = \frac{y(s)}{u(s)} = \frac{K}{s(Ts - 1)},$$

а ей соответствуют уравнения состояния

$$\begin{aligned}\dot{x}_1(t) &= x_2(t), \\ \dot{x}_2(t) &= \frac{1}{T}x_2(t) + \frac{K}{T}u(t)\end{aligned}$$

с матрицами системы и управления

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & \frac{1}{T} \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{K}{T} \end{bmatrix}.$$

Вывод уравнений фазовых траекторий подобен предыдущему примеру, и поэтому дадим окончательный результат при $u(t) = c$:

$$x_1(t) = Tx_2(t) - KcT \ln \left| 1 + \frac{x_2(t)}{Kc} \right| + C_0,$$

где $C_0 = x_{10} - Tx_{20} + KcT \ln \left| 1 + \frac{x_{20}}{Kc} \right|$.

Функции изменения координат во времени также найдем с помощью векторно-матричного решения, но преследуя учебные цели, переходную матрицу вычислим другим способом, использующим обратное преобразование Лапласа:

$$\Phi(t, 0) = e^{At} = L^{-1} \{ [sE - A]^{-1} \}.$$

Составим матрицу

$$[sE - A] = \begin{bmatrix} s & -1 \\ 0 & s - \frac{1}{T} \end{bmatrix}.$$

Обратная к ней матрица вычисляется следующим образом:

$$[sE - A]^{-1} = \frac{\text{adj}[sE - A]}{\det[sE - A]},$$

где $\text{adj}[sE - A]$ – присоединенная матрица, определяемая как транспонированная матрица из алгебраических дополнений, а $\det[sE - A]$ – определитель указанной матрицы.

В этом примере обратная матрица имеет вид

$$[sE - A]^{-1} = \frac{\begin{bmatrix} s - \frac{1}{T} & 1 \\ 0 & s \end{bmatrix}}{s \left(s - \frac{1}{T} \right)} = \begin{bmatrix} \frac{1}{s} & -\frac{T}{s} + \frac{T}{s - \frac{1}{T}} \\ 0 & \frac{1}{s - \frac{1}{T}} \end{bmatrix}.$$

Найдем выражения элементов переходной матрицы, вычисляя обратное преобразование Лапласа от обратной матрицы:

$$e^{At} = L^{-1} \left\{ \begin{bmatrix} \frac{1}{s} & -\frac{T}{s} + \frac{T}{s - \frac{1}{T}} \\ 0 & \frac{1}{s - \frac{1}{T}} \end{bmatrix} \right\} = \begin{bmatrix} 1 & T \left(e^{\frac{t}{T}} - 1 \right) \\ 0 & e^{\frac{t}{T}} \end{bmatrix}.$$

Проверка по начальным условиям для $t = 0$ подтверждает правильность полученного результата.

Подстановка выражения переходной матрицы в стандартную форму дает векторно-матричное решение уравнений состояния

$$\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & T \left(e^{\frac{t}{T}} - 1 \right) \\ 0 & e^{\frac{t}{T}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{10} \\ x_{20} \end{bmatrix} + \int_0^t \begin{bmatrix} 1 & T \left(e^{\frac{t-\tau}{T}} - 1 \right) \\ 0 & e^{\frac{t-\tau}{T}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{K}{T} \end{bmatrix} u(\tau) d\tau.$$

Вычисляя интеграл при $u(t) = c$, находим функции изменения координат

$$\begin{aligned} x_1(t) &= Kc \left[T \left(e^{\frac{t}{T}} - 1 \right) - t \right] + T \left(e^{\frac{t}{T}} - 1 \right) x_{20} + x_{10}, \\ x_2(t) &= Kc \left(e^{\frac{t}{T}} - 1 \right) + e^{\frac{t}{T}} x_{20}. \end{aligned}$$

На рис. 6.9, *a*, *б* представлена графическая информация о фазовых траекториях и временных функциях, когда на вход объекта подан положительный сигнал управления.

Если сигнал управления $u(t) = -c$, получаем выражение семейства фазовых траекторий

$$x_1(t) = T x_2(t) + KcT \ln \left| 1 - \frac{x_2(t)}{Kc} \right| + C_0,$$

где

$$C_0 = x_{10} - T x_{20} - KcT \ln \left| 1 - \frac{x_{20}}{Kc} \right|,$$

представленного на рис. 6.10, а.

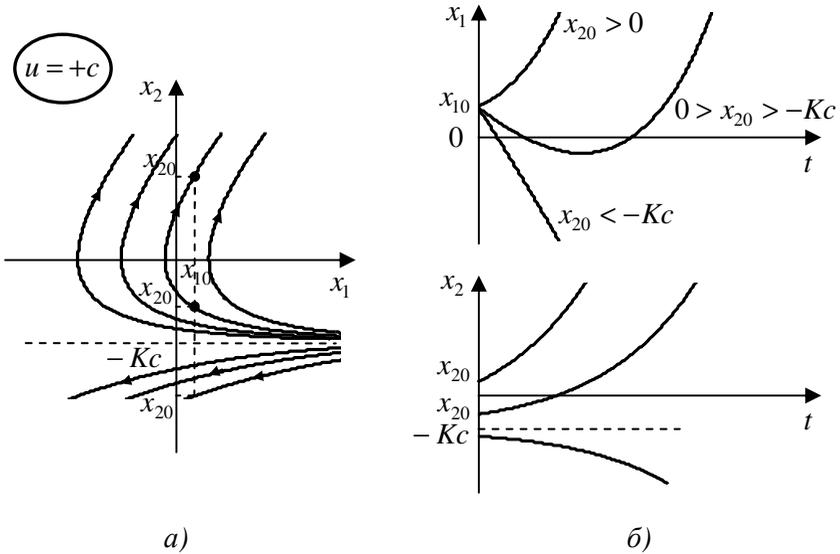


Рис. 6.9

Графики временных функций изменения координат

$$x_1(t) = Kc \left[t - T \left(e^{\frac{t}{T}} - 1 \right) \right] + T \left(e^{\frac{t}{T}} - 1 \right) x_{20} + x_{10},$$

$$x_2(t) = Kc \left(1 - e^{\frac{t}{T}} \right) + e^{\frac{t}{T}} x_{20}$$

показаны на рис. 6.10, б.

Семейство фазовых траекторий для нулевого сигнала управления $u(t) = 0$ в виде прямых линий

$$x_1(t) = T x_2(t) + C_0,$$

где $C_0 = x_{10} - T x_{20}$, а также временные функции изменения координат

$$x_1(t) = T \left(e^{\frac{t}{T}} - 1 \right) x_{20} + x_{10},$$

$$x_2(t) = e^{\frac{t}{T}} x_{20}$$

приведены соответственно на рис. 6.11, а, б.

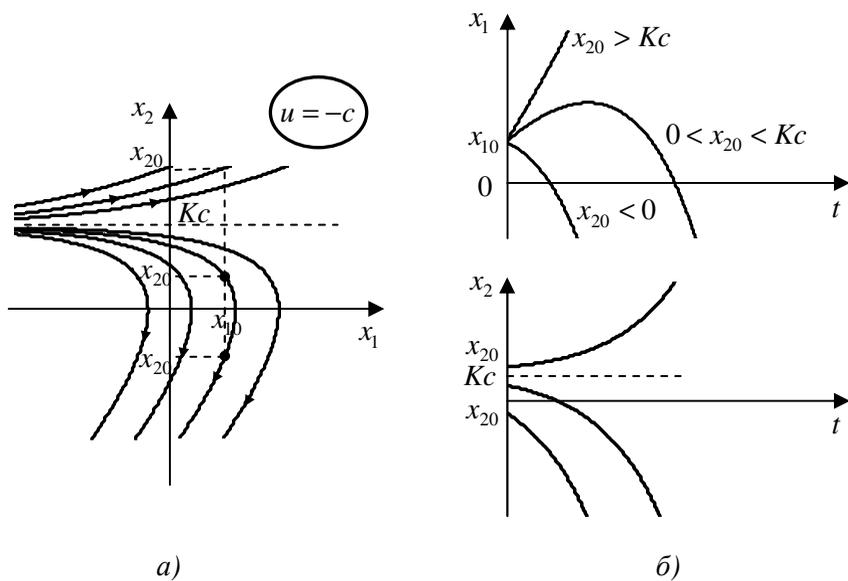


Рис. 6.10

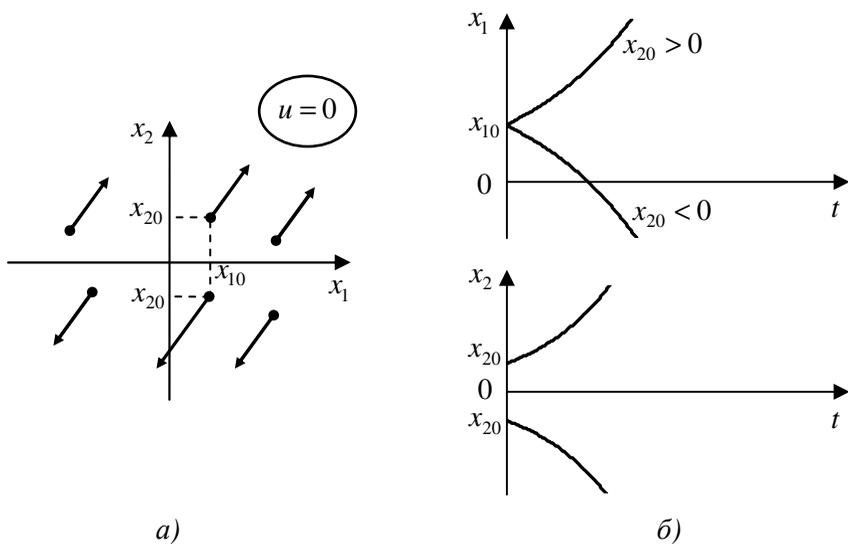


Рис. 6.11

6.5. Границы семейств фазовых траекторий в релейных системах

Исследуя заданную нелинейную систему (см. рис. 6.1), на фазовой плоскости необходимо выделить области, соответствующие определенным выходным сигналам управления реле. Поскольку входным сигналом реле в автономной системе является сигнал ошибки, зависящий от переменных состояния

$$\varepsilon(t) = -x_1(t) - ax_2(t),$$

то условия переключения реле из одного состояния в другое и будут задавать границы существования определенных семейств фазовых траекторий.

Так для идеализированного двухпозиционного реле (№ 4 Приложения) переключение происходит при переходе через нуль сигнала ошибки:

$$u(t) = \begin{cases} c, & \varepsilon(t) \geq 0 \\ -c, & \varepsilon(t) < 0 \end{cases}.$$

Приравнивая нулю выражение ошибки, получим на фазовой плоскости линию переключения реле

$$x_2(t) = -\frac{1}{a}x_1(t),$$

наклон которой зависит от коэффициента усиления обратной связи по скорости. На рис. 6.12, a изображена эта линия переключения, выше которой получаем область отрицательного сигнала управления реле $-c$, а ниже прямой — область положительного сигнала управления $+c$.

В идеализированном трехпозиционном реле (№ 5 Приложения) переключения происходят при переходе сигнала ошибки через значения $\pm d$ в соответствии с выражением

$$u(t) = \begin{cases} c, & \varepsilon(t) \geq d \\ 0, & -d < \varepsilon(t) < d \\ -c, & \varepsilon(t) \leq -d \end{cases}.$$

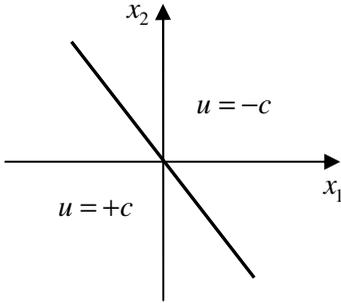
Отсюда получаем две линии переключения реле с $-c$ на 0 или, наоборот, с 0 на $-c$:

$$x_2(t) = -\frac{1}{a}x_1(t) + \frac{d}{a};$$

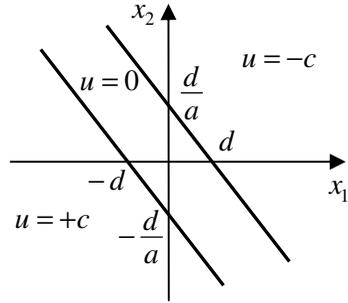
и от $+c$ на 0 или, наоборот, с 0 на $+c$:

$$x_2(t) = -\frac{1}{a}x_1(t) - \frac{d}{a},$$

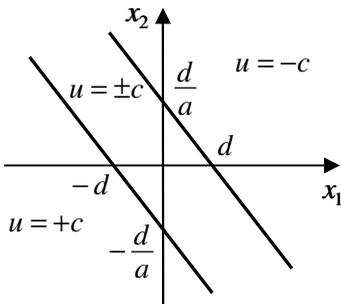
представленные на рис. 6.12, б.



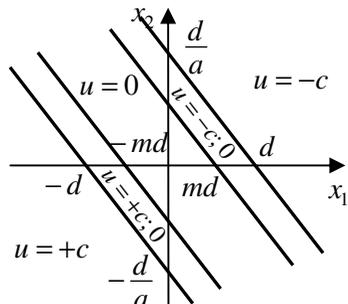
а)



б)



в)



г)

Рис. 6.12

Область выше первой прямой соответствует семейству фазовых траекторий с отрицательным сигналом управления $u = -c$, ниже второй прямой имеем семейство фазовых траекторий с положительным сигналом управления $u = +c$, а между двумя линиями переключения находится семейство фазовых траекторий с нулевым сигналом управления $u = 0$.

Двухпозиционное реле с гистерезисом (№ 6 Приложения) также имеет две линии переключения, но здесь условия переключения реле зависят от величины сигнала ошибки и от направления ее изменения:

$$u(t) = \begin{cases} c, \varepsilon(t) \geq d \\ c, -d < \varepsilon(t) < d, \dot{\varepsilon}(t) < 0 \\ -c, \varepsilon(t) \leq -d \\ -c, -d < \varepsilon(t) < d, \dot{\varepsilon}(t) > 0. \end{cases}$$

Уравнения линий переключения имеют такой же вид, как и в предыдущем случае, но область, заключенная между двумя прямыми на фазовой плоскости (рис. 6.12, в), может принадлежать семействам фазовых траекторий как с отрицательным, так и с положительным управлением $u = \pm c$.

Для трехпозиционного реле с гистерезисом (№ 7 Приложения) количество условий переключения увеличивается:

$$u(t) = \begin{cases} c, \varepsilon(t) \geq d \\ c, md < \varepsilon(t) < d, \dot{\varepsilon}(t) < 0 \\ 0, -md \leq \varepsilon(t) \leq md \\ 0, md < \varepsilon(t) < d, \dot{\varepsilon}(t) > 0 \\ 0, -d < \varepsilon(t) < -md, \dot{\varepsilon}(t) < 0 \\ -c, \varepsilon(t) \leq -d \\ -c, -d < \varepsilon(t) < -md, \dot{\varepsilon}(t) > 0. \end{cases}$$

В результате получаем четыре линии переключения реле на фазовой плоскости:

с 0 на $-c$

$$x_2(t) = -\frac{1}{a}x_1(t) + \frac{d}{a},$$

с $-c$ на 0

$$x_2(t) = -\frac{1}{a}x_1(t) + \frac{md}{a},$$

с 0 на $+c$

$$x_2(t) = -\frac{1}{a}x_1(t) - \frac{d}{a}$$

и с $+c$ на 0

$$x_2(t) = -\frac{1}{a} x_1(t) - \frac{md}{a},$$

которые приведены на рис. 6.12, z с указанием областей, соответствующих различным сигналам управления реле.

6.6. Построение фазовых траекторий систем с кусочно-линейными статическими характеристиками

Траектория движения в релейной системе на фазовой плоскости, начинающаяся в некоторой точке (x_{10}, x_{20}) , будет представлять собой соединенные на линиях переключения реле фазовые траектории из семейств, соответствующих различным сигналам управления. Поскольку все необходимые семейства фазовых траекторий и линии переключения реле для рассматриваемых примеров получены, то имеем возможность приступить к исследованию нелинейных систем на фазовой плоскости, а также и во временной области.

Рассмотрим пример, когда объект в системе описывается двумя последовательно соединенными интеграторами, на вход которого подается управляющий сигнал с идеализированного двухпозиционного реле (вариант 1.1 в табл. 6.1). Изучим характер свободного движения в системе при произвольных начальных условиях x_{10} и x_{20} в зависимости от величины коэффициента усиления обратной связи a .

Пусть в первом случае обратная связь по скорости отсутствует, что означает $a = 0$. Тогда линия переключения реле совпадает с вертикальной осью на фазовой плоскости. А так как семейства фазовых траекторий для данного объекта, состоящие из парабол, симметричны относительно оси x_1 и симметричны относительно оси x_2 при различных знаках сигнала управления с реле, то результирующая фазовая траектория оказывается замкнутой кривой.

На рис. 6.13, a показан процесс формирования замкнутой траектории движения, начавшейся в точке (x_{10}, x_{20}) по параболе из семейства фазовых траекторий, соответствующих отрицательному сигналу управления $u = -c$. При достижении линии переключения реле, расположенной вдоль вертикальной оси, движение в системе продолжается по параболе из семейства фазовых траекторий с по-

ложительным сигналом управления $u = +c$, проходящей через полученную точку на линии переключения. Следующее переключение реле с $u = +c$ на $u = -c$ произойдет в верхней точке на вертикальной оси, и, таким образом, попадаем на траекторию, проходящую через начальную точку. В результате образуется замкнутый цикл из двух парабол, который соответствует периодическим негармоническим колебаниям с амплитудой и частотой, зависящими от начальных условий.

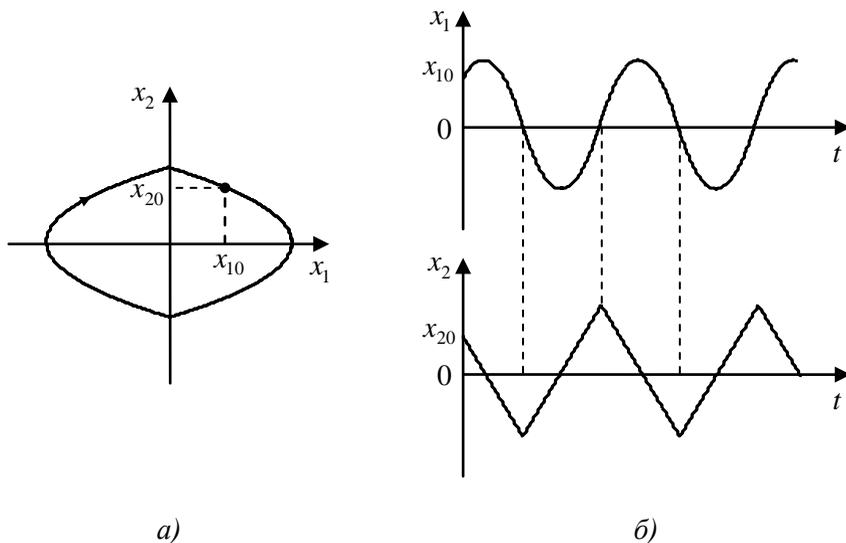


Рис. 6.13

Временные графики этого автоколебательного процесса представлены на рис. 6.13, б, где $x_1(t)$ является периодической функцией, также составленной из парабол, а $x_2(t)$ – пилообразная функция. Нетрудно показать, что с увеличением начального отклонения от положения равновесия амплитуда автоколебаний увеличивается, а частота уменьшается.

Для того чтобы устранить автоколебания в системе, вводится отрицательная обратная связь по скорости. При этом наклон линии переключения реле становится отрицательным. Даже небольшое значение коэффициента усиления a приводит к стремлению фазо-

вой траектории к началу координат (рис. 6.14, *a*) и обеспечивает затухание колебательного процесса по координатам $x_1(t)$ и $x_2(t)$ (рис. 6.14, *б*).

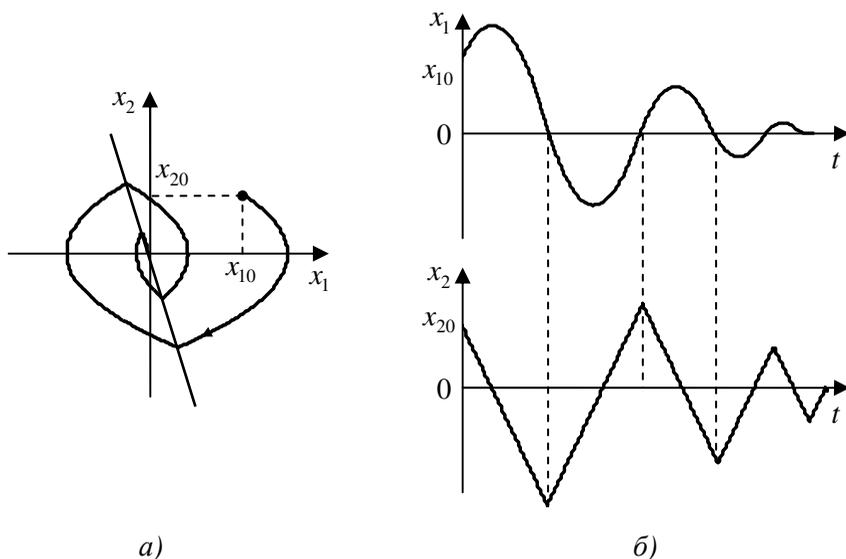


Рис. 6.14

С ростом коэффициента усиления a наклон линии переключения уменьшается по абсолютной величине, что приводит к изменению характера движения относительно положения равновесия из-за возникновения так называемого скользящего режима. Этот случай иллюстрируется с помощью рис. 6.15, *a, б*.

Вначале, как показано на рис. 6.15, *a*, движение происходит под действием отрицательного сигнала управления, и при достижении линии переключения реле меняется знак сигнала управления на положительный. В том случае, если фазовая траектория для положительного сигнала управления в точке переключения направлена в область, лежащую выше линии переключения, где $u = -c$, то и возникает скользящий режим. Такой режим в реальных условиях сопровождается высокочастотным дребезгом контактов реле и существенным замедлением переходных процессов.

В рассматриваемом примере возможны и другие варианты существования скользящего режима, возникающего на более поздних моментах времени переходного процесса. С математической точки зрения скользящий режим возникает, если наклон линии переключения по абсолютной величине меньше модуля производной $\frac{dx_2}{dx_1}$ в точке переключения. Отсюда можно сделать вывод о том, что для идеализированного двухпозиционного реле в любом сходящемся к началу координат переходном процессе скользящий режим рано или поздно должен возникнуть.

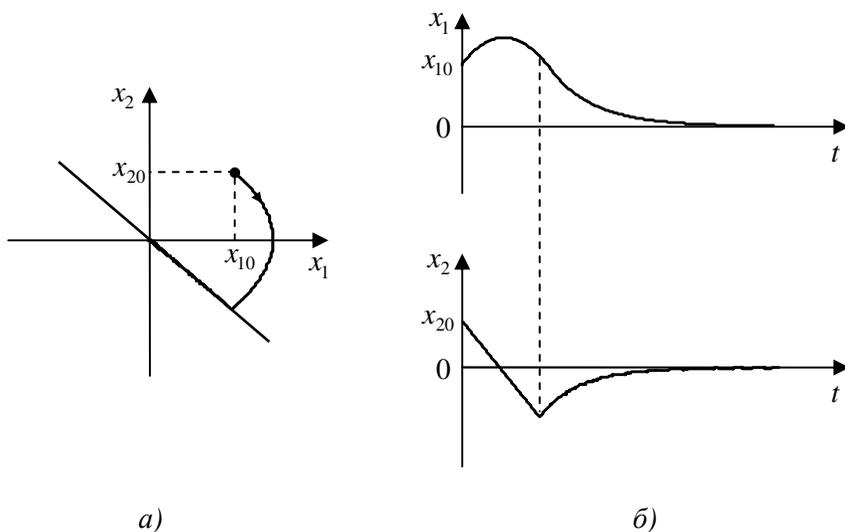


Рис. 6.15

При моделировании нелинейной системы с идеализированными двухпозиционными или трехпозиционными реле возникновение скользящего режима создает вычислительные проблемы вплоть до остановки ЦВМ из-за того, что в таком режиме сильно возрастает частота переключения реле при бесконечно малых отклонениях от линии переключения. Эти проблемы устраняются после того, как в релейные характеристики вводится хотя бы очень узкая петля гистерезиса, приближающая идеализированную модель к реальной статической характеристике реле.

С учетом гистерезиса в двухпозиционном реле на фазовой плоскости располагаются две линии переключения, и возникающий скользящий режим соответствует изменению сигнала ошибки в системе внутри петли гистерезиса, как показано на рис. 6.16, а, б.

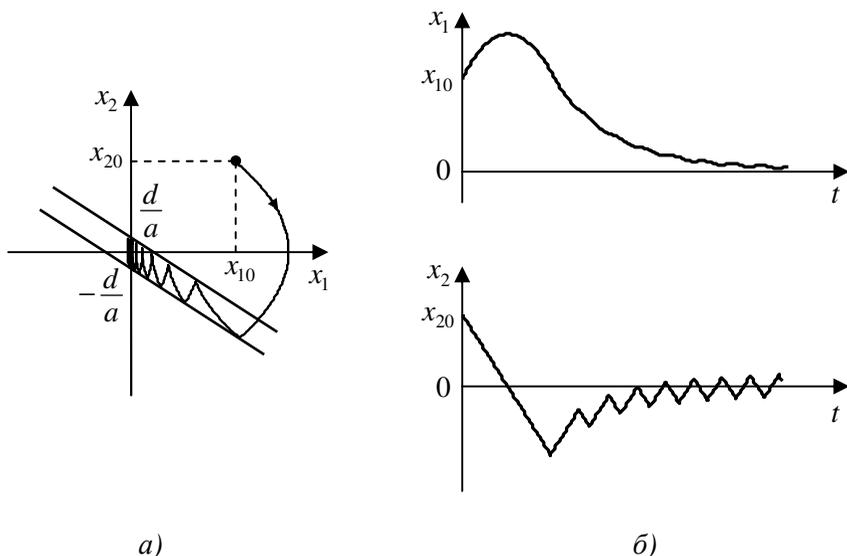


Рис. 6.16

Заканчивается движение к началу координат предельным циклом с небольшой амплитудой автоколебаний, обусловленным переключениями реле в точках $\pm \frac{d}{a}$ на вертикальной оси.

При уменьшении коэффициента усиления a скользящий режим исчезает, и процесс перехода от исходного положения к началу координат приобретает колебательный характер (рис. 6.17, а, б). Завершается этот процесс также предельным циклом, связанным с периодическим движением в системе по петле гистерезиса, но уже с существенно большей амплитудой автоколебаний на выходе.

Если обратная связь по скорости отсутствует ($a = 0$), то обе линии переключения, поворачиваясь относительно точек $+d$ и $-d$ на оси x_1 , принимают вертикальное положение, из-за чего движение в системе становится неустойчивым. На рис. 6.18, а представ-

лена фазовая траектория свободного движения в такой системе, соответствующая неустойчивому колебательному процессу, а на рис. 6.18, б показаны графики изменения фазовых координат во времени с возрастающей амплитудой.

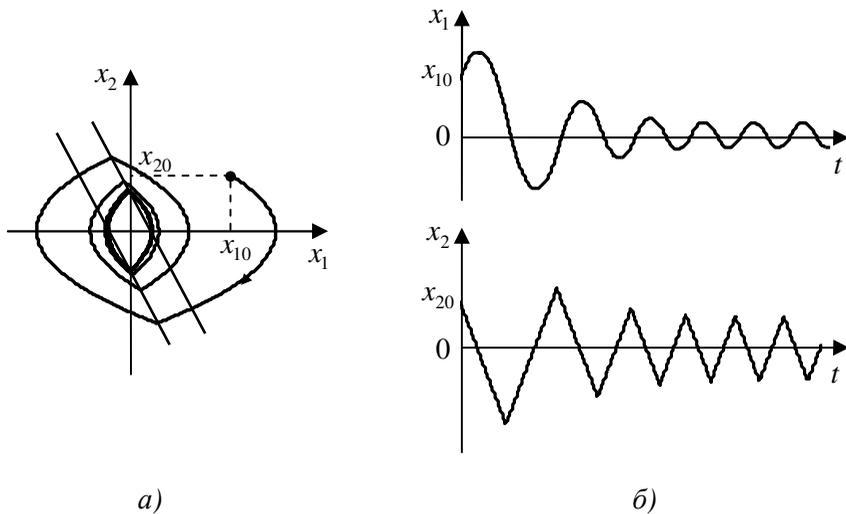


Рис. 6.17

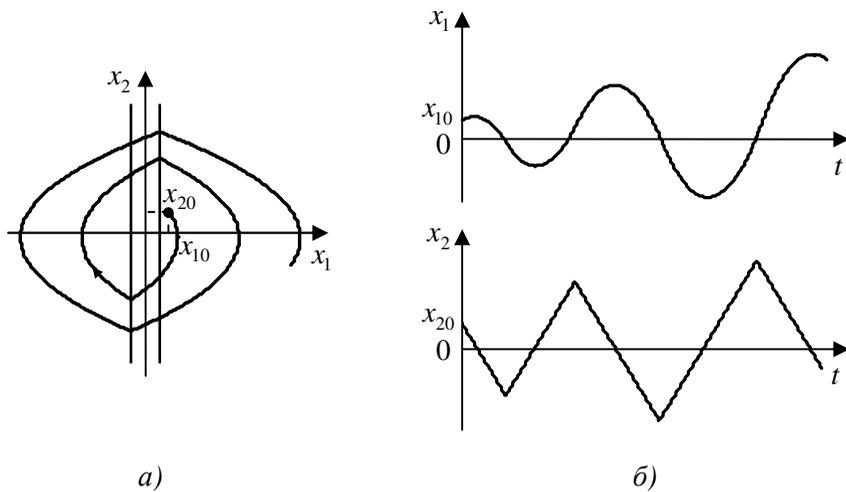


Рис. 6.18

Подобное сравнение результатов исследования нелинейной системы при использовании идеализированных и реальных статических характеристик реле для других вариантов, заданных в табл. 6.1, предстоит выполнить в данной лабораторной работе.

6.7. Схема проведения экспериментов

В соответствии с заданным вариантом в среде *Simulink* реализуется структурная схема нелинейной системы, представленная на рис. 6.19, к которой подсоединяются регистрирующие приборы в виде осциллографа (*Scope*) и двухкоординатного графопостроителя (*XY-Graph*). Для удобства построения фазовых траекторий и фазовых портретов используется также перевод переменных состояния в рабочую область *Matlab* (*Simout*).

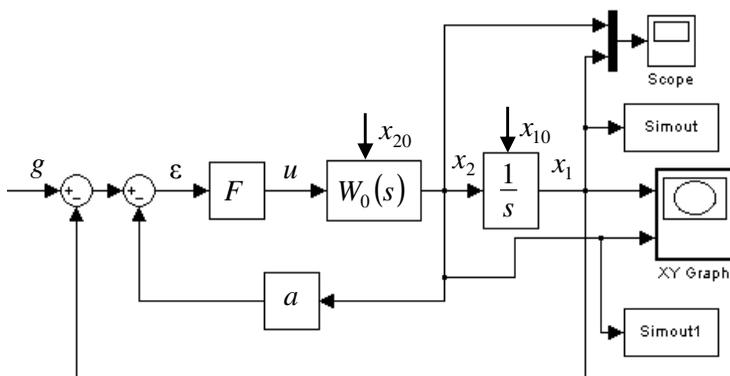


Рис. 6.19

На вход системы сигналы не подаются, поскольку изучается свободное движение из заданных ненулевых начальных условий по координатам x_{10} и x_{20} , которые устанавливаются на соответствующих интеграторах. На осциллографе одновременно наблюдаются два процесса изменения координат x_1 и x_2 во времени, а на графопостроителе – их фазовая траектория.

6.8. Задание и порядок выполнения работы

1. Для полученного варианта нелинейной системы оценить характер движения в ней, пользуясь методом гармонического баланса.

2. Собрать схему моделирования заданной нелинейной системы в соответствии с рис. 6.19.

3. Получить фазовые траектории и временные процессы изменения фазовых координат при различных значениях коэффициента усиления в обратной связи a .

4. Определить предельное значение коэффициента усиления a , при котором в заданном варианте наступает скользящий режим.

Вопросы для подготовки к работе

1. Дайте определение фазовой плоскости.

2. Какие математические действия необходимо осуществить, чтобы получить фазовую траекторию?

3. Как по фазовой траектории определяется направление движения?

4. Дайте определение переходной матрицы.

5. Как отыскивается решение для фазовых координат с помощью переходной матрицы?

6. Как определяются границы семейств фазовых траекторий в релейных системах на фазовой плоскости?

7. Дайте определение линии переключения и объясните, как она находится.

8. Что называется предельным циклом?

9. Какие существуют типы предельных циклов?

10. Что такое скользящий режим?

11. При каких условиях возникает скользящий режим?

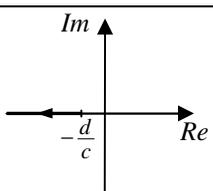
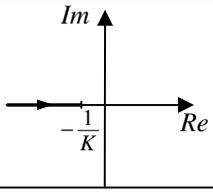
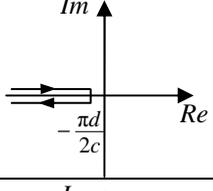
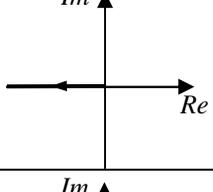
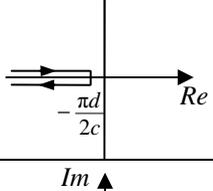
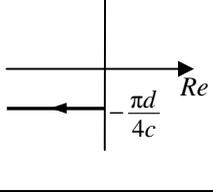
12. В чем особенность фазового портрета для систем с неоднозначными нелинейностями?

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Шапкарин А.В., Кулло И.Г. Лабораторный практикум по курсу “Теория автоматического управления”. Линейные непрерывные динамические системы. М.: МИФИ, 2007. – 84 с.
2. Дэбни Дж., Харман Т. Simulink 4. Секреты мастерства. М.: Изд-во Бином. Лаборатория знаний, 2003.
3. Черных И.В. Simulink: среда создания инженерных приложений. М.: Диалог-МИФИ, 2003.
4. <http://matlab.exponenta.ru/>
5. Иващенко Н.Н. Автоматическое регулирование. Теория и элементы систем: Учебник для вузов. – 4-е изд., перераб. и доп. М.: Машиностроение, 1978.
6. Теория автоматического управления / Под ред. А.А. Воронова. Ч.2. М.: Высшая школа, 1986.
7. Дорф Р., Бишоп Р. Современные системы управления / Пер. с англ. Копылова Б.И. М.: Лаборатория Базовых Знаний, 2002.
8. Филлипс Ч., Харбор Р. Системы управления с обратной связью / Пер. с англ. Б.И. Копылова. М.: Лаборатория Базовых Знаний, 2001.

ПРИЛОЖЕНИЕ

№	Наименование	Статическая характеристика	$a(A)$	$b(A)$
1	Зона насыщения		$\frac{2c}{\pi d} \left(\arcsin \frac{d}{A} + \frac{d}{A} \sqrt{1 - \frac{d^2}{A^2}} \right)$	0
2	Зона нечувствительности		$K - \frac{2K}{\pi} \arcsin \frac{d}{A} - \frac{2Kd}{\pi A} \sqrt{1 - \frac{d^2}{A^2}}$	0
3	Насыщение с зоной нечувствительности		$\frac{2K}{\pi} \left(\arcsin \frac{d_2}{A} - \arcsin \frac{d_1}{A} \right) + \frac{2K}{\pi A} \left(d_2 \sqrt{1 - \frac{d_2^2}{A^2}} - d_1 \sqrt{1 - \frac{d_1^2}{A^2}} \right)$	0
4	2-х позиционное реле		$\frac{4c}{\pi A}$	0
5	3-х позиционное реле		$\frac{4c}{\pi A} \sqrt{1 - \frac{d^2}{A^2}}$	0
6	2-х позиционное реле с гистерезисом		$\frac{4c}{\pi A} \sqrt{1 - \frac{d^2}{A^2}}$	$-\frac{4cd}{\pi A^2}$

$q(A)$	$\mu(A)$	Годограф $-\frac{1}{J(A)}$
$\frac{2c}{\pi d} \left(\arcsin \frac{d}{A} + \frac{d}{A} \sqrt{1 - \frac{d^2}{A^2}} \right)$	0	
$K - \frac{2K}{\pi} \arcsin \frac{d}{A} - \frac{2Kd}{\pi A} \sqrt{1 - \frac{d^2}{A^2}}$	0	
$\frac{2K}{\pi} \left(\arcsin \frac{d_2}{A} - \arcsin \frac{d_1}{A} \right) + \frac{2K}{\pi A} \left(d_2 \sqrt{1 - \frac{d_2^2}{A^2}} - d_1 \sqrt{1 - \frac{d_1^2}{A^2}} \right)$	0	
$\frac{4c}{\pi A}$	0	
$\frac{4c}{\pi A} \sqrt{1 - \frac{d^2}{A^2}}$	0	
$\frac{4c}{\pi A}$	$-\arctg \frac{d}{A \sqrt{1 - \frac{d^2}{A^2}}}$	

№	Наименование	Статическая характеристика	$a(A)$	$b(A)$
7	3-х позиционное реле с гистерезисом		$\frac{2c}{\pi A} \left(\sqrt{1 - \frac{d^2}{A^2}} + \sqrt{1 - \frac{m^2 d^2}{A^2}} \right)$	$\frac{2cd}{\pi A^2} (m - 1)$
8	Люфт		$\frac{K}{\pi} \left(\frac{\pi}{2} + \arcsin \left(1 - \frac{2d}{A} \right) \right) +$ $+ \frac{2K}{\pi} \left(1 - \frac{2d}{A} \right) \sqrt{\frac{d}{A} \left(1 - \frac{d}{A} \right)}$	$- \frac{4Kd}{\pi A} \left(1 - \frac{d}{A} \right)$

Примечание. Коэффициент усиления K в выражениях для коэффициентов гармонической линеаризации есть тангенс угла наклона линейного участка соответствующей нелинейности.

$q(A)$	$\mu(A)$	Годограф $-\frac{1}{J(A)}$
$\frac{2c}{\pi A} \sqrt{2\left(1 - \frac{md^2}{A^2}\right) + 2\sqrt{\left(1 - \frac{d^2}{A^2}\right)\left(1 - \frac{m^2 d^2}{A^2}\right)}}$	$-\arctg \frac{\frac{d}{A}(1-m)}{\sqrt{1 - \frac{d^2}{A^2} + \sqrt{1 - \frac{m^2 d^2}{A^2}}}}$	
*)	**)	

$$*) \frac{K}{\pi} \sqrt{\left(\frac{\pi}{2} + \arcsin\left(1 - \frac{2d}{A}\right)\right)^2 + 4\frac{d}{A}\left(1 - \frac{d}{A}\right) + 4\left(\frac{\pi}{2} + \arcsin\left(1 - \frac{2d}{A}\right)\right)\left(1 - \frac{2d}{A}\right)\sqrt{\frac{d}{A}\left(1 - \frac{d}{A}\right)}}$$

$$**) -\arctg \frac{4\frac{d}{A}\left(1 - \frac{d}{A}\right)}{\frac{\pi}{2} + \arcsin\left(1 - \frac{2d}{A}\right) + 2\left(1 - \frac{2d}{A}\right)\sqrt{\frac{d}{A}\left(1 - \frac{d}{A}\right)}}$$

Алексей Владимирович Шапкарин
Иван Геннадьевич Кулло

Лабораторный практикум
“Теория автоматического управления.
Методы исследования нелинейных систем”

Редактор Е.К. Коцарева

Подписано в печать 15.11.2012. Формат 60×84 1/16

Печ. л. 5,75. Уч.-изд. л. 5,75. Тираж 120 экз.

Изд. № 54/1. Заказ № 53.

Национальный исследовательский ядерный университет “МИФИ”,
115409, Москва, Каширское ш., д. 31.

ООО “Полиграфический комплекс “Курчатовский”.
144000, Московская область, г. Электросталь, ул. Красная, д. 42.